ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS: INVESTIGACIONES Y DESARROLLOS EN AMÉRICA LATINA

Lugo-Armenta, Jesús. Pino-Fan Luis
Pochulu, Marcel. Castro, Walter
Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción
matemáticos: investigaciones y desarrollos en America Latina
Jesús Lugo-Armenta, Luis Pino-Fan,
Marcel Pochulu y Walter Castro.
Osorno: Editorial Universidad de Los Lagos, 2022
384 p.; 17 x 24 cm cerrado
RPI: 2022-A-5538 ISBN: 978-956-6043-77-5
1. Educación Matemática 2. Enfoque Ontosemiótico
3. Formación de profesores de matemáticas 4. Errores y dificultades
en el aprendizaje de las matemáticas

Este libro fue aprobado por el Consejo Editorial y un Comité
Científico Internacional a través de referato.

ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y
LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS: INVESTIGACIONES
Y DESARROLLOS EN AMERICA LATINA

Primera edición: 2022

ISBN 978-956-6043-77-5

editorial@ulagos.cl
www.editorial.ulagos.cl
Cochrane 1070, Osorno

Edición: Ricardo Casas Tejeda
Ilustración de portada: Kiyén Clavería Aguas
Maquetación: Alexis Hernández Escobar

Impreso en Santiago de Chile

ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS: INVESTIGACIONES Y DESARROLLOS EN AMÉRICA LATINA

EDITORES:

Jesús G. Lugo-Armenta
Luis R. Pino-Fan
Marcel Pochulu
Walter F. Castro

Universidad De Los Lagos
EDITORIAL

ÍNDICE

PRÓLOGO 15

CAPÍTULO 1

Estudio de la tabla estadística en la educación básica chilena 17

Study of the statistical table in chilean basic education 17

1. Introducción 19

2. Antecedentes 21

2.1. Complejidad semiótica de la tabla estadística 21

2.2. Investigación sobre comprensión de la tabla estadística 22

2.3. Investigación en libros de texto sobre la tabla estadística 24

3. Marco teórico 25

4. Planificación de la investigación 27

5. Avance de resultados en la propuesta de investigación 29

5.1. Metodología 29

5.2. Resultados 30

6. Reflexiones finales 34

Agradecimientos 35

Referencias 35

ANEXO. Muestra de libros analizados 39

CAPÍTULO 2

Procesos matemáticos en la práctica argumentativa mediante el uso de la geometría dinámica 41

Mathematical processes in practice argumentative using dynamic geometry 41

1.1. La Geometría Dinámica como medio para la generación de argumentos 44

2. Contexto de la problemática 45

3. Herramientas teóricas metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) 46

4. Consideraciones metodológicas 49

4.1. Organización didáctica de las actividades propuestas........50
4.2. Descripción general de la propuesta de actividades............51
5. Análisis y resultados 52
5.1. Procesos matemáticos identificados
en la práctica argumentativa 54
5.2. Configuraciones ontosemióticas
en el estudio de las isometrías en el plano..........56
6. Conclusiones y reflexiones finales 58
Referencias 59

CAPÍTULO 3
Análisis didáctico de lecciones de libros de texto
sobre proporcionalidad basado en el enfoque ontosemiótico.
Implicaciones para la formación de profesores..........63
Didactic analysis of textbook lessons on proportionality
based on the ontosemiotic approach.
Implications for teacher training 63
1. Introducción y antecedentes..........65
2. Problemática, preguntas y objetivos de investigación 66
3. Marco Teórico..........68
4. Metodología 68
5. Avances del proyecto de investigación, análisis y resultados .69
6. Reflexiones Finales 77
Agradecimientos 79
Referencias 79

CAPÍTULO 4
Análisis del currículo chileno en educación básica
entorno división como isomorfismo de medida..........85
Analysis of the chilean curriculum in basic education
environment division as isomorphism of measure..........85
1. Antecedentes 87
1.1. Introducción 87
1.2. Estudio Histórico – documental de la noción de división .87
1.3. Desde la época más remota a la actualidad..........87
1.4. Dificultades en la enseñanza de la división..........90
1.5. Estudios con estudiantes sobrelos problemas de División 92
2. Contexto de la problemática..........94
2.1. Problema de investigación 95

2.2. Objetivo....................96
2.3. Metodología....................96
3. Análisis de la noción de división en 5° básico, según el EOS....97
3.1. Análisis epistémico del programa de estudio de 5° básico .97
3.2. Configuración epistémica para los libros de texto....................100
3.3. Discusión y propuesta....................105
Agradecimientos 107
Referencias....................107

CAPÍTULO 5
Caracterización de los niveles de algebrización
en las prácticas matemáticas de un libro
de educación básica chilena....................109
Characterisation of the levels of algebraization
in mathematical practices of a primary education textbook....................109
1. Antecedentes 111
2. Niveles de algebrización onto-semióticos....................113
3. Metodología....................115
3.1. Contexto del estudio....................115
3.1.1. Matemática para sexto básico 117
3.2. Análisis de las prácticas matemáticas....................117
4. Resultados....................119
4.1. Nivel 0 de algebrización:
objetos y procesos matemáticos identificados 119
4.2. Prácticas en niveles proto-algebraicos 120
4.3. Nivel consolidado de algebrización:
objetos y procesos matemáticos identificados 123
5. Reflexiones finales 124
Agradecimientos 127
Referencias....................127

CAPÍTULO 6
Uso del constructo idoneidad didáctica
del enfoque onto-semiótico en el diseño
de una tarea de matemáticas en educación secundaria
obligatoria: el caso de la enseñanza de la geometría....................133
Using the didactic suitability construct of onto-semiotic
approach to design a math task at secondary school:
the case of geometry....................133
1. Antecedentes 135

1.1. La idoneidad didáctica 135
2. Propuesta 138
3. Análisis y discusión 143
4. Conclusión 150
Agradecimientos 151
Referencias 151

CAPÍTULO 7
Creación de problemas de optimización por estudiantes universitarios: un análisis mediante mapas híbridos 153
Creation of optimization problems by university students: an analysis using hybrid maps 153
1. Antecedentes 155
1.1. Estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial 156
1.2. Tratamiento matemático de la optimización en libros de texto 158
2. Contexto de la problemática 162
3. Metodología 163
4. Análisis, discusión y propuesta 167
Agradecimientos 168
Referencias 169

CAPÍTULO 8
Situaciones didácticas para el estudio de la trigonometría en el décimo grado 171
Didactic situations for the study of trigonometry in the tenth grade 171
1. Introducción 173
2. Aspectos de la enseñanza y el desarrollo de la trigonometría en el contexto escolar 175
3. La formación didáctico-matemática, el EOS y la representación semiótica 176
4. Procesos de deducción y representación de proposiciones matemáticas 180
4.1. Situación didáctica 182
4.2 Situación didáctica 184
4.3 Situación didáctica 187

5. Reflexiones finales 189
Referencias..190

CAPÍTULO 9
Nueva mirada para analizar las conexiones
desde dos lentes teóricos: la teoría ampliada
de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico 193
New view for analyzing connections from
two theoretical lenses: the extended theory of mathematical
connections and the onto-semiotic approach..193
1. Introducción y antecedentes..195
1.1. Contexto de la problemática de investigación..195
2. Marco Teórico 197
2.1. Las conexiones matemáticas en Educación Matemática ...197
2.2. Enfoque Ontosemiótico 200
3. Metodología 202
4. Análisis y Resultados 203
4.1. Primer resultado: Teoría Ampliada de
las Conexiones Matemáticas (TAC) 203
4.2. Segundo resultado: "Networking of theories"
entre la TAC y el EOS 208
4.2.1. Complementariedades entre la TAC y el EOS 210
4.2.2. Análisis con la TAC 212
4.2.3. Análisis con el EOS 213
5. Reflexiones finales 215
Referencias..215

CAPÍTULO 10
El desarrollo de la reflexión sobre la práctica
en la formación de profesores de matemáticas:
una mirada desde el lesson study y los criterios
de idoneidad didáctica 221
The development of the reflection on the practice
in the training of mathematics teachers a look from
the lesson study and the didactical suitability criteria 221
1. Introducción..223
2. Marco Teórico..224
2.1. La metodología *Lesson Study* (LS) 224

2.2. Tipos de análisis didácticos propuesto por el EOS e Idoneidad Didáctica 225
3. Metodología 228
3.1. Fases seguidas para el estudio del constructo CID 228
3.2. Fases seguidas para las experiencias de LS 229
3.3. Fase final 232
4. Resultados 232
5. Consideraciones finales 237
Reconocimiento 238
Referencias 238

CAPÍTULO 11
Representaciones semióticas de objetos matemáticos y asignación de sentidos en situaciones de tratamiento. El caso de profesores de matemáticas 243
Semiotic representations of mathematical objects and assignment of senses in treatment situations. The case of math teachers 243
1. Introducción 245
2. Antecedentes de investigación 246
3. Marco teórico 250
4. Metodología 253
5. Análisis y resultados 255
5. Consideraciones finales 262
6. Referencias 266

CAPÍTULO 12
Análisis de tareas de matemática que se proponen en una formación continua de profesores cuando las TIC se establecen como recurso prioritario: un estudio de caso 269
Analysis of mathematics tasks that are proposed in a continuous training of teachers when ict is established as a priority resource: a case study 269
1. Contexto de la problemáica 271
2. Antecedentes 271
3. Cuestiones metodológicas 273
4. Análisis y discusión 279
5. A modo de cierre 286
Referencias 287

CAPÍTULO 13
Análisis de la práctica de un profesor en la enseñanza de derivadas para ingeniería en el Perú 289
Analysis of the professor's practice in the teaching of derivatives for engineering in Peru 289
1. Antecedentes 291
2. Objetivo de Investigación 292
3. Marco Teórico 292
4. Metodología 294
5. Resultados: Estudio de caso del profesor B 296
6. Conclusiones 303
Reconocimiento 308
Referencias 309

CAPÍTULO 14
Estado de la cuestión con relación al conocimiento didáctico-matemático en modelación matemática con el uso de las TIC 311
The state of research into didactic-mathematical knowledge and modeling with the use of ict 311
1. Antecedentes 313
2. Metodología 326
3. Conclusiones 327
Referencias 328

CAPÍTULO 15
La complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de docentes 335
The complexity of mathematical objects in the initial training of teachers 335
1. Introducción 337
2. Objetivo de investigación 338
3. Marco Teórico 338
4. Metodología 346
5. Resultados 348
6. Conclusiones 350
7. Reflexiones Finales 350
Reconocimiento 351
Referencias 351

CAPÍTULO 16

Secuencia didáctica para el desarrollo de habilidades propias del pensamiento algebraico....355
Didactic sequence for the development of algebraic thinking skills....355
1. Antecedentes....357
2. Problemática....358
3. Marco Teórico....359
4. Elementos metodológicos....359
5. Secuencias didácticas y elementos para el diseño....360
6. Análisis a priori....369
7. Análisis a posteriori de los Niveles de Algebrización detectados en la implementación....372
8. Consideraciones Finales....376
Referencias....376

PRÓLOGO

En el marco del *Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Ontosemiótico* (EOS) se celebró, del 24 al 7 de noviembre de 2020, las Primeras Jornadas de Estudiantes de Postgrado en Matemática Educativa que utilizan los desarrollos teóricos y metodológicos del EOS. La presente publicación incluye los resúmenes extensos de los 16 trabajos que se presentaron.

Comienzo este prólogo felicitando a los promotores de este evento por la iniciativa, así como a los estudiantes, tutores y directores de las tesis por la decisión de adoptar las herramientas del EOS para plantear sus proyectos de investigación.

Sin duda la organización de este tipo de eventos es un dispositivo crucial para configurar y hacer avanzar la comunidad académica comprometida con el desarrollo y aplicación de un sistema teórico inclusivo como es el EOS. Este marco teórico se viene desarrollando desde hace más de 25 años y, como se refleja en la gran cantidad de publicaciones disponibles en internet (http://enfoqueontosemiotico.ugr.es), está teniendo un cierto impacto a nivel internacional. Sin embargo, es fundamental atraer a jóvenes investigadores que se involucren en el estudio, comprensión y aplicación de las nuevas herramientas conceptuales y estrategias metodológicas que propone el EOS, las cuales entran en competición y diálogo con otras teorías.

Este libro es una muestra significativa de las posibilidades que ofrece el EOS para el planteamiento de problemas de investigación en matemática educativa y su abordaje con herramientas teóricas pertinentes. Así, el lector encontrará avances en proyectos de tesis doctorales y maestría sobre análisis de libros de texto y del currículo; diseño de situaciones y tareas; uso de las TIC; modelación matemática; formación de profesores. Los contenidos matemáticos sobre los que se centran las investigaciones refieren a estadística, geometría, trigonometría, cálculo (la derivada), álgebra, aritmética (división y proporcionalidad). El nivel educativo incluye la educación primaria, secundaria, bachillerato, formación inicial y continua de profesores, así como la formación matemática de ingenieros. En cuanto a las herramientas del EOS se aplican la noción pragmática de significado, configuraciones de objetos y procesos, configuraciones cognitivas, funciones semióticas; la noción de idoneidad didáctica y su uso como apoyo para la práctica reflexiva, así como el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos para la formación inicial y continuada de los profesores de matemáticas. No faltan incluso algunos trabajos que abordan el problema de la comparación y articulación del EOS con otras teorías, como son los campos conceptuales y el modelo de las conexiones matemáticas extendidas.

Espero que este libro, reflejo del trabajo realizado en las Primeras Jornadas de Estudiantes de Posgrado en el marco del *Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Ontosemiótico* sea el primero de una serie de eventos similares en años sucesivos.

Juan D. Godino
Universidad de Granada

CAPÍTULO 1

ESTUDIO DE LA TABLA ESTADÍSTICA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA CHILENA

STUDY OF THE STATISTICAL TABLE IN CHILEAN BASIC EDUCATION

Jocelyn D. Pallauta, María M. Gea y Pedro Arteaga
jocelyndiaz@correo.ugr.es - mmgea@ugr.es - parteaga@ugr.es
Universidad de Granada, España

Resumen

En este trabajo se describe el proyecto de tesis doctoral dirigido al estudio de la tabla estadística en la educación básica en Chile, junto a algunos de los resultados encontrados hasta el momento en el análisis de la tipología de tablas estadísticas planteadas en una muestra de textos escolares chilenos dirigidos al segundo ciclo de educación básica. El análisis de los textos escolares permite caracterizar el significado institucional pretendido sobre dicho objeto matemático, y aporta elementos para la construcción de un cuestionario de evaluación del conocimiento de los estudiantes de educación básica sobre las tablas estadísticas. Los resultados muestran una distribución gradual creciente en complejidad semiótica de la tabla de distribución de una variable, aunque el tratamiento es contrario en torno a la tabla de doble entrada conforme se progresa de curso.
Palabras clave: *tabla estadística, libros de texto, educación primaria, proyecto de tesis doctoral.*

Abstract

This paper describes the doctoral thesis project aimed at the study of the statistical table in basic education in Chile, together with some of the results found so far on the analysis of the typology of statistical tables presented in a sample of Chilean school textbooks aimed at the second cycle of basic education. The analysis of school texts allows us to characterize the intended institutional meaning of this mathematical object and provides elements for the construction of a questionnaire to evaluate the elementary school students' knowledge about statistical tables. The results show a gradual increase in the semiotic complexity of the single-variable distribution table, although the treatment is the opposite for the double-entry table as the course progresses.

Keywords: *statistical tables, textbooks, elementary education, doctoral dissertation project.*

1. Introducción

La habilidad en la lectura crítica de datos estadísticos se ha convertido en una necesidad del ciudadano en el contexto actual, ya que aparecen a diario tablas y gráficos para transmitir información en diferentes medios de comunicación como la prensa, Internet o en la vida profesional, entre otros ejemplos, y basándose en la información que exponen y el contexto sobre el que se representan los datos se deben tomar decisiones (Engel, 2019; Gould, 2017). Un ejemplo latente de la importancia de esta habilidad lo encontramos actualmente debido a la crisis de la pandemia por el COVID-19, donde a diario encontramos información en tablas y gráficos estadísticos sobre la evolución de contagios y muertes organizada por países, comunidades dentro de cada país, ciudades o incluso por municipios. De acuerdo a Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez, Vásquez y Alsina (2020), se pueden presentar diversidad de situaciones de riesgo ante las que un ciudadano debe actuar, según la evolución y situación de la pandemia, como por ejemplo al viajar (estudiar la situación en el país de destino), recibir visita de extranjeros (conocer la situación de la pandemia en el país de origen), etc.

De acuerdo a Estrella, Mena-Lorca y Olfos (2017), la tabla estadística es un objeto matemático de utilidad para la resolución de problemas, pues sirve tanto para registro de datos (como recurso de la memoria humana para registrar información) así como herramienta de cálculo y análisis de información para generar conocimiento. Su enseñanza cobra gran relevancia en la formación que reciben los estudiantes desde las primeras etapas educativas, como se observa en las directrices curriculares de diversos países (CCSSI 2010; MECD, 2014; NCTM, 2000). En particular, se trata de un contenido presente en las bases curriculares chilenas a partir de los primeros niveles educativos (MINEDUC, 2018) y justamente en segundo ciclo de educación básica es cuando se estudia en mayor profundidad, puesto que se trabaja con frecuencias absolutas y relativas, a propósito del estudio de la probabilidad frecuencial, y se inicia el uso de la tabla de doble entrada (MINEDUC, 2015; 2018).

Como manifiesta la investigación previa, la enseñanza de la tabla estadística adquiere un nivel de complejidad creciente desde la educación primaria (Estrella, 2014), por lo que variados autores recomiendan asegurar su comprensión desde las primeras edades. Aunque la literatura sobre el tema es escasa, se muestra la dificultad que presentan los estudiantes en la construcción y lectura de la tabla estadística (Estrella; 2014; Gabucio, Martí, Enfedaque, Gilabert y Konstantinidou, 2010). Además, considerando que el libro de texto suele ser un recurso de enseñanza y aprendizaje ampliamente utilizado por el docente y el estudiante, que dirige en gran medida la actividad matemática del aula (Alkhateeb, 2019; Herbel, 2007), los antecedentes muestran la tendencia en estos recursos de proponer actividades centradas en completar, construir tablas o realizar cálculos según su lectura (Bivar y Selva, 2011; Guimarães, Gitirana, Cavalcanti y Marques, 2007) desatendiendo actividades, de gran importancia en el desarrollo del pensamiento estadístico, como es estudiar las relaciones en los datos que se representan con el fin de analizar su variabilidad (Wild y Pfannkuch, 1999).

En los siguientes apartados se describen los antecedentes de investigación más relevantes que ayudan a delimitar el contexto de la problemática abordada en la tesis doctoral llevada a cabo por la primera autora de este trabajo, que se encuentra en fase de desarrollo; después se presenta el marco teórico que fundamenta la planificación del proyecto de tesis y algunos avances de los resultados que hasta el momento se han obtenido, junto a unas reflexiones finales.

2. Antecedentes

2.1. Complejidad semiótica de la tabla estadística

Como establece Duval (2003), la especificidad de la estructura de cada tipo de tabla estadística influye en el modo en que se interpreta su información. Lahanier-Reuter (2003) identifica tres tipos principales de tablas, que tendremos en cuenta en nuestro trabajo:

a. *Tabla de datos*, donde se presenta la información de un estudio en forma de listado, en celdas organizadas según filas y columnas (en ocasiones sin delimitar dichas celdas con bordes, aunque sí organizadas mediante espacios o tabulaciones), pero sin calcular frecuencias, por lo que no emerge el concepto de distribución de una variable estadística.

b. *Tabla de distribución de una o varias variables*, donde se representa la distribución de frecuencias de una variable, relacionando cada valor de la variable a uno o más tipos de frecuencia. De este modo se representa de manera implícita la aplicación entre el conjunto de modalidades de la variable y un conjunto numérico (naturales, reales, etc.) dependiendo del tipo de frecuencia que se represente (absoluta, relativa, etc.).

c. *Tablas de doble entrada o de contingencia*, donde se representa la clasificación cruzada de dos variables estadísticas unidimensionales (X e Y) y el cuerpo de la tabla contiene las frecuencias en las celdas de cada cruce de modalidades de las variables representadas.

Esta clasificación puede ser completada según la investigación desarrollada por Arteaga y cols. en la interpretación de gráficos estadísticos (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010), ya que podemos identificar niveles similares de complejidad semiótica en la interpretación de la tabla estadística. En la clasificación que establecen los autores se identifican cuatro niveles de complejidad semiótica en un gráfico, según los objetos representados:

C1. *Representación de datos aislados, de una o varias variables.* Este nivel se refiere a la identificación de datos en un gráfico, sin emplear el concepto de variable o de distribución de la misma. Se trata de identificar un dato de modo aislado en la gráfica.

C2. *Representación de un listado de datos.* Se representa un conjunto de datos sin considerar su distribución de frecuencias. Se utiliza la idea de variable, se considera la tipología de sus valores, pero no se considera la frecuencia de los mismos ni el concepto de distribución.

C3. *Representación de una distribución de frecuencias.* Se trata de representar en un gráfico la distribución de una variable estadística, teniendo en cuenta el recuento de las frecuencias de sus modalidades, según los datos obtenidos para el estudio.

C4. *Representación de una distribución de frecuencias de dos o más variables.* Este nivel se refiere a la representación de la distribución de una variable estadística bidimensional, en el caso de las tablas de doble entrada o contingencia, bien desde un diagrama de barras apilado o agrupado, diagrama de dispersión, etc.

2.2. Investigación sobre comprensión de la tabla estadística

La investigación previa en torno a la comprensión de la tabla estadística informa de la dificultad de los estudiantes en su construcción y lectura, puesto que al tratarse de una representación organizada de la información de un estudio, resume la distribución de una variable estadística y se requiere diferenciar las modalidades de la variable que se representa y sus frecuencias. De acuerdo a Batanero (2000), esta dificultad se hace más acusada cuando los valores de la variable están agrupados en intervalos, pues se suele ignorar, tanto en la construcción como en su lectura, que cada uno de estos intervalos puede considerar igual o distinta amplitud.

Como indica Koschat (2005), la información representada en una tabla estadística requiere de la elección de las filas y columnas que la componen y el tipo de información que se va a representar en dichas filas y columnas. En el trabajo con las tablas estadísticas se decide el tipo de número que representar, según los datos e información del estudio, así como el uso de elementos gráficos o simbólicos para estructurar su representación. De este modo, la estructura de la información que representa una tabla estadística muestra no solo números, sino la gran diversidad de relaciones que se pueden establecer entre ellos. Por lo que una adecuada comprensión de este objeto matemático facilitará el estudio de otros contenidos estadísticos, como por ejemplo, la probabilidad o la asociación, entre otros (Ortiz, 2002).

La investigación en la comprensión de la tabla estadística se orienta, principalmente, a la construcción y lectura de la tabla de doble entrada. En Martí, Pérez y de la Cerda (2010) se pide a 153 estudiantes de educación primaria y secundaria: 31 de 5º curso (10 años), 39 de 6º curso (11 años), 43 de 1ºESO (12 años) y 40 de 2ºESO (13 años), organizar información dada en forma de listado para construir una tabla de doble entrada. Se evidencia la dificultad en diferenciar la variables que conforman la tabla, así como distribuir los datos en la tabla agrupándolos en intervalos (estatura inferior a 130 cm, entre 130 y 159 cm, entre 150 y 169, y superior a 169 cm.), organizarlos según género y calcular las frecuencias conjuntas según el cruce de sus modalidades. El mayor porcentaje de logro se consiguió en 2º ESO (58% de éxito), mientras que el menor porcentaje se presenta en 5º de primaria (26% de éxito), obteniendo mejores resultados los estudiantes de 6º de primaria (51% de éxito) que los de 1º ESO (33% de éxito). Además, se detecta un alto índice de respuesta en la estrategia de construir la tabla como listado de datos.

En el estudio desarrollado por Estrella y Olfos (2015) en dos cursos de tercer grado de primaria (7 a 9 años) conformados por 38 y 42 alumnos chilenos, sin enseñanza previa sobre las tablas, se observa que la tabla estadística no se emplea como representación natural para representar información (solo 5 de los 80 participantes representaron una tabla de frecuencias), a pesar de plantear un contexto cercano al estudiante. Los autores manifiestan la necesidad de prestar atención a la enseñanza y aprendizaje de la tabla estadística en los primeros niveles educativos, a través de la organización de información con datos reales.

Respecto a las dificultades y errores en la construcción de tablas o la traducción a otro tipo de representación, se encuentra la confusión del tipo de tabla a construir, falta de los elementos que la conforman (título o etiquetas) y confusión entre tipos de frecuencia o errores de cálculo.

2.3. Investigación en libros de texto sobre la tabla estadística

La investigación sobre la tabla estadística en los libros de texto es escasa, y principalmente se centra en el análisis de las gráficas estadísticas. Como antecedente importante encontramos las investigaciones desarrolladas por Díaz-Levicoy y cols. (Díaz-Levicoy, Morales y López-Martín, 2015; Díaz-Levicoy, Ruz y Molina-Portillo, 2017), analizando textos de educación básica en Chile en los primeros niveles (1º a 3º básico). Las variables de análisis consideradas se refieren al tipo de tabla planteada al estudiante, la actividad que se pide realizar, el contexto propuesto en la actividad, de acuerdo a las pruebas PISA (OECD, 2019), así como el nivel de lectura que se requiere para responder a las preguntas que se plantean sobre la tabla (Friel, Curcio y Bright, 2001). Se muestra el predominio de actividades como leer o construir gráficos a partir de la información de una tabla, siendo más frecuentes los niveles más elementales de lectura, referidos a la lectura literal o el uso de la misma para calcular estadísticos o realizar comparaciones entre datos.

Los estudios referidos al análisis de tablas y gráficos estadísticos en textos escolares brasileños de los niveles de educación básica, 1º a 5º (7 a 11 años) confirman los resultados obtenidos por Díaz-Levicoy y colaboradores en el contexto de textos escolares de educación básica en Chile. De este modo, en Guimarães, Gitirana, Cavalcanti y Marques (2007) se observa que las tareas se refieren fundamentalmente a la lectura de la tabla y no tanto al análisis de la información que representan, como sería deseable, puesto que en el modelo de pensamiento estadístico que establecen Wild y Pfankuch (1999) se destaca la necesidad de plantear al estudiante el análisis de la variación de los datos para su análisis. También Bivar y Selva (2011) observan que las actividades más frecuentes que se plantean a los estudiantes están relacionadas con completar y leer la tabla estadística.

3. Marco teórico

El marco teórico utilizado para fundamentar y dirigir el proyecto de investigación de la tesis doctoral es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2020), puesto que se ajusta al modo en que consideramos la tabla estadística como un objeto matemático.

Al considerar que el significado de un objeto matemático emerge de la práctica matemática que se realiza al resolver una situación problema, en lugar de delimitar una práctica particular que dote de significado a un objeto matemático, interesa determinar el sistema de prácticas que se llevan a cabo, en la diversidad de situaciones donde cobra sentido (Godino y Batanero, 1994). De este modo, el análisis de los elementos primarios del significado de un objeto matemático comprende los elementos del lenguaje, conceptos, proposiciones o propiedades, los diferentes procedimientos y situaciones-problema, así como la diversidad de argumentaciones o justificaciones que se emiten para validar o explicar la actividad realizada (Godino, Batanero y Font, 2020).

Por otra parte, la actividad matemática se analiza desde la dualidad personal e institucional del conocimiento matemático, puesto que el sistema de prácticas matemáticas puede encontrarse en el dominio de un sujeto (significado personal) o bien ser relativo a una comunidad o institución (significado institucional). En cuanto al significado institucional, en nuestro trabajo analizamos el significado pretendido de una muestra de libros de texto ampliamente utilizados en el sistema educativo chileno, pues se trata del tipo de significado institucional que informa de la planificación del proceso de instrucción; en este caso, la planificación se analiza en base a la unidad didáctica del libro de texto referida al bloque de contenidos de estadística y probabilidad. Mientras que, analizamos el significado personal del estudiante, al evaluar las respuestas de una muestra de estudiantes a un cuestionario específicamente diseñado para nuestro estudio. Para ello, usamos la noción de configuración ontosemiótica, que nos permite caracterizar la actividad matemática desde la diversidad de objetos y procesos implicados en su desempeño, tanto desde el enfoque epistémico como cognitivo (Godino, Batanero y Font, 2020).

4. Planificación de la investigación

Como se ha mencionado anteriormente, la tabla estadística es un objeto matemático de gran importancia en la resolución de problemas matemáticos y su investigación requiere más atención en didáctica de la estadística, sobre todo en el contexto chileno donde el currículo amplía considerablemente los contenidos de estadística y probabilidad en segundo ciclo de educación básica, haciendo del manejo de la tabla estadística una idea estocástica fundamental (mineduc, 2015; 2018). Todo esto motiva nuestra inquietud por contribuir al desarrollo este campo de investigación en el tema, por lo que el proyecto de investigación de la tesis doctoral pretende abordar el estudio de la tabla estadística en segundo ciclo de educación básica en Chile (5º hasta 8º básico: 10 a 13 años) desde dos perspectivas secuenciales. La primera de ellas es el análisis de una muestra de textos escolares en dicha etapa educativa, mientras que la segunda abarca el análisis de la actividad matemática de una muestra de estudiantes chilenos de 6º y 8º curso, en respuesta a dos cuestionarios diseñados específicamente para evaluar su conocimiento sobre el tema.

Podemos diferenciar en nuestra planificación diferentes fases, atendiendo al objetivo principal de la investigación descrito anteriormente:

> *Fase de estudio preliminar y fundamentación teórica*: el diseño de los instrumentos de evaluación del conocimiento de los estudiantes chilenos sobre la tabla estadística se apoya en las variables que influyen en la actividad con la misma, por lo que el análisis de la literatura previa, de los documentos curriculares y de los libros de texto ayudará a conectar con la enseñanza que reciben los estudiantes en la etapa de educación básica. En esta fase se concretan los fundamentos de la investigación según el marco teórico, el análisis de la literatura previa de investigación y de los documentos curriculares de

segundo ciclo de educación básica en Chile en torno a la tabla estadística (MINEDUC, 2015; 2018).

Fase de análisis de textos escolares: en esta fase se caracteriza el significado pretendido de la tabla estadística en una muestra de libros de texto chilenos de 5º a 8º de educación básica en Chile, analizando el tipo de tabla y de actividad matemática que se propone al estudiante en el tema de estadística y probabilidad. La muestra se conforma de los textos entregados por el Ministerio de Educación, que atienden al marco curricular (MINEDUC, 2015; 2018), con la finalidad de contrastar la información presente en ellos en torno a las tablas estadísticas. La descripción de la metodología empleada en su análisis se describe en la Sección 4 de este trabajo, donde presentamos el avance de resultados en esta fase del proyecto de investigación. Los principales resultados consisten en ejemplos de las diferentes categorías obtenidas con el análisis, junto a tablas de resumen que presenten la frecuencia de cada categoría y con ello comparar los resultados del análisis realizado, así como con los obtenidos en investigaciones previas. Estos resultados servirán de base para determinar el contenido del cuestionario de evaluación que se elabora en la fase posterior.

Fase de diseño de instrumentos de evaluación: en esta fase se diseñan y validan los cuestionarios que se utilizarán para el proceso de evaluación del conocimiento de los estudiantes chilenos sobre la tabla estadística en educación básica. Los cuestionarios se dirigen a estudiantes chilenos de 6º y 8º curso de Educación Primaria (11 y 13 años) y sus ítems se seleccionan a partir de un banco de tareas adaptadas del análisis de los textos escolares de la fase previa, en los que se controle las variables que influyen en la actividad con la tabla estadística. Los ítems seleccionados para 6º se amplían en el cuestionario para 8º puesto que los estudiantes han tratado más contenidos, como es la frecuencia relativa y acumulada. Se sigue con la posterior validación de los cuestionarios por un juicio de expertos y la prueba piloto de los ítems, este último para determinar su legibilidad y el tiempo requerido en responderlo, así como sus características psicométricas básicas (índices de dificultad y discriminación; fiabilidad; validez), la construcción de dichos instrumentos seguirá normas metodológicas rigurosas (Cohen, Morrison y Manion, 2013). Estos cuestionarios permitirán caracterizar el significado personal adquirido por los estudiantes, y su construcción será útil para la evaluación de los alumnos y aportará información para los propios docentes y otras investigaciones.

Fase de implementación y análisis de información: en esta fase se aplica cada cuestionario a una muestra amplia de estudiantes chilenos de 6º y 8º de educación básica (11 y 13 años), para evaluar su conocimiento sobre tablas estadísticas. Mediante este estudio trataremos de examinar si los objetivos planteados en las directrices curriculares, y libros de texto son alcanzados por los escolares. Y con ello, describir sus principales logros y dificultades, así como su relación con el cambio en la edad y curso escolar.

5. Avance de resultados en la propuesta de investigación

En esta sección se presenta un avance de resultados del proyecto de tesis doctoral que se encuentra en curso, en particular, sobre la fase de análisis de textos escolares chilenos. Aunque se encuentra avanzado el análisis de la configuración de objetos y procesos matemáticos implicados en el conjunto de situaciones que se plantean al estudiante en los temas de estadística y probabilidad, debido a la limitación de espacio en este trabajo, nos limitamos a presentar resultados sobre la tipología de tablas estadísticas presentes en los textos escolares chilenos analizados.

5.1. Metodología

El presente estudio se desarrolla bajo un enfoque mixto, de gran componente cualitativo (Cohen et al., 2013). La investigación es exploratoria, porque, aunque tenemos antecedentes son pocos los que analizan textos escolares dirigidos a los niveles educativos de nuestra investigación, y no consideran todas las tareas previstas. Se emplea como técnica metodológica el análisis de contenido (Neuendorf, 2016), para ello se establecen de modo sistemático diferentes etapas que comienzan por la lectura de los temas de estadística y probabilidad, que es donde se promueve la actividad matemática con la tabla estadística. Seguidamente, se delimitan los párrafos en donde aparece la tabla estadística, bien de modo explícito o implícito para hacer uso de la misma. Una vez establecidas dichas unidades de análisis se proceden, mediante un proceso cíclico e inductivo, a examinar su contenido para así confeccionar un listado de categorías para cada variable analizada y con ello describir con ejemplos cada posible categoría. A continuación, se presenta el avance de resultados en torno a la tipología de tablas.

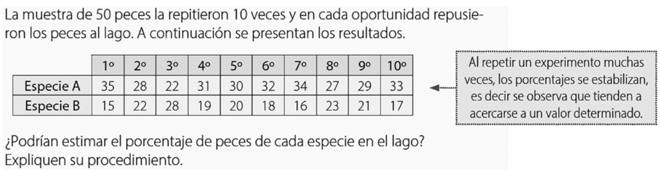
La muestra está constituida por doce textos escolares de 5º a 8º curso de educación básica en Chile (Anexo 1), distribuidos de manera gratuita por el Ministerio de Educación a todos los estudiantes y profesores pertenecientes a la educación pública y sistema particular subvencionado del país. Para cada nivel educativo se analizan los tres textos que distribuye el Ministerio: el libro de texto, con el que se desarrolla cada tema propuesto en el currículo; el cuaderno de ejercicios, con el que el estudiante complementa al libro de texto y la guía didáctica para el docente, que orienta la labor docente y añade ejercicios adicionales de profundización para facilitar la gestión del aula.

5.2. Resultados

Partiendo de la clasificación establecida por Lahanier-Reuter (2003) de las tablas estadísticas y relacionando los niveles de complejidad semiótica propuestos por Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010) se encuentra la siguiente tipología de tablas, según su complejidad semiótica, en los textos analizados:

C1. *Representación de datos aislados.* No se encuentran tablas que representen datos aislados en los textos analizados, por lo que no hay datos para este nivel de complejidad semiótica.

C2. *Tabla de datos.* Se representa el conjunto de datos de un estudio, pero sin considerar la distribución de sus frecuencias, tanto en una variable o más, como muestra la Figura 1.



La muestra de 50 peces la repitieron 10 veces y en cada oportunidad repusieron los peces al lago. A continuación se presentan los resultados.

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Especie A	35	28	22	31	30	32	34	27	29	33
Especie B	15	22	28	19	20	18	16	23	21	17

Al repetir un experimento muchas veces, los porcentajes se estabilizan, es decir se observa que tienden a acercarse a un valor determinado.

¿Podrían estimar el porcentaje de peces de cada especie en el lago? Expliquen su procedimiento.

Figura 1. Ejemplo de tabla de datos

Fuente: Merino, Muñoz, Pérez y Rupin, 2016, p. 289

C3. *Tabla de distribución de una variable.* Este nivel de complejidad semiótica se subdivide en tres niveles, atendiendo a los diferentes objetos matemáticos representados:

C3.1. *Tablas de frecuencias ordinarias*: se representa la distribución de frecuencias (absolutas, relativas o porcentaje).

C3.1. *Tabla de frecuencias acumuladas*: se representa la distribución de una variable incluyendo sus frecuencias acumuladas (absolutas, relativas o porcentaje), cuyo tratamiento involucra el manejo de desigualdades (Ver Figura 2).

En un hotel se registró los días de estadía de los huéspedes por el período de una semana. El resultado se representa en la siguiente tabla:

Estadías de huéspedes en una semana		
Estadía en días	f	F
1	142	142
2		305
3	203	
4	170	
5	76	
6	54	
7	82	

a. Completa la tabla con las frecuencias acumuladas.
b. Determina la media aritmética.
c. Determina la mediana.
d. Confecciona un gráfico de barras con los datos de la tabla.
e. ¿Cambiaría la mediana si no se consideraran las estadías que sobrepasan los 4 días? Fundamenta.

Figura 2. Ejemplo de tabla de frecuencias acumuladas

Fuente: Merino et al., 2016, p. 331

C4. *Tabla de frecuencias agrupadas en intervalos:* se representa la distribución de la variable con sus valores agrupados en intervalos, lo que implica trabajar con extremos, valores aproximados, rango, etc.

C5. *Tabla de doble entrada o contingencia*: la distribución de la variable estadística bidimensional se representa mediante el cruce de las dos variables estadísticas que la conforman. En las respectivas celdas de cada cruce se muestran sus frecuencias, donde se distinguen tres tipos: conjunta (o doble), marginal (fila o columna) y condicionada (a la fila o columna). Este nivel se divide en dos subniveles, de acuerdo a su complejidad semiótica, según si los valores de alguna de las variables se encuentren agrupados en intervalos de clase (*C4.2*) o no agrupados (*C4.1*), como muestra la Figura 3.

Los siguientes datos corresponden a los resultados de la encuesta clasificados entre hombres y mujeres. Explica el procedimiento que seguirías para representar los datos en un gráfico.

Medio	A pie	Bicicleta	Colectivo	Automóvil	Bus	Metro
Hombres	18	20	9	55	27	80
Mujeres	22	20	11	45	33	60

Figura 3. Tabla de contingencia (C4.1)

Fuente: Maldonado y Castro, 2017, p. 233

En la Figura 4 se muestran los resultados del análisis del tipo de tabla estadística, atendiendo a su nivel de complejidad semiótica

(Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero et al., 2010) y el nivel educativo. Se observa la presencia de todos los tipos de tablas descritos anteriormente con un predominio de las tablas de distribución de una variable (5º: 47,5%, 6º: 72,2%, 7º: 76,1% y 8º: 57,9%), especialmente las que representan frecuencias ordinarias (absolutas, relativas o porcentajes) con un nivel de complejidad semiótica C3.1 (5º: 47,5%, 6º: 72,2%, 7º: 49,3% y 8º: 27,4%). Le siguen en representatividad similar la tabla de datos C2, la que cobra mayor relevancia en 8º curso, a pesar de tratarse de la tabla con menor complejidad semiótica (5º: 23,0%, 6º: 13,0%, 7º: 14,4% y 8º: 33,6%) y la tabla de doble entrada, que es la que posee mayor complejidad semiótica (5º: 29,5%, 6º: 14,8%, 7º: 9,6% y 8º: 8,5%) y paradójicamente tiene mayor representatividad en el menor nivel educativo analizado, que es 5º.

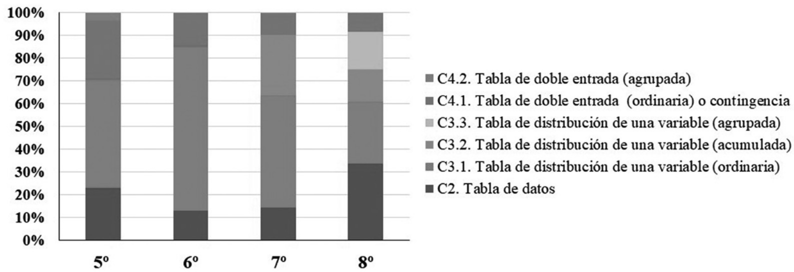


Figura 4. Distribución del tipo de tabla en los textos analizados atendiendo al nivel de complejidad semiótica, según nivel educativo

Por tanto, los textos analizados siguen las orientaciones curriculares en cierta medida, ya que plantean el estudio de la tabla de distribución de una variable incrementando de manera gradual su complejidad semiótica, según se avanza el nivel educativo. Así encontramos que en 7º se inicia el estudio de la tabla de distribución de una variable con frecuencias acumuladas C3.2 (5º: 0%, 6º: 0%, 7º: 26,8% y 8º: 14,2%) y en 8º se inicia el estudio de la tabla de distribución de una variable con datos agrupados C3.3 (5º: 0%, 6º: 0%, 7º: 0% y 8º: 16,4%).

Mientras que el estudio de la tabla de doble entrada o contingencia, según nivel educativo, tiene una distribución gradual decreciente en complejidad semiótica conforme se avanza el nivel educativo. Por tanto, encontramos el estudio de la tabla de doble entrada con datos agrupados C4.2 con mayor presencia en 5º que en 8º (5º: 3,6%, 6º: 0%, 7º: 0,5% y 8º: 0%) como también ocurre con la tabla de doble entrada o contingencia (5º: 25,9%, 6º: 14,8%, 7º: 9,1% y 8º: 8,5%).

6. Reflexiones finales

La atención que recibe la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la tabla estadística es escasa, como se manifiesta en los antecedentes más destacados que se resumen en el presente trabajo. Se justifica así el interés por la problemática abordada en el proyecto de investigación de tesis doctoral que viene desarrollando la primera autora de este trabajo y es dirigida por el resto de autores, en la que se aborda el estudio de la tabla estadística en segundo ciclo de educación básica en Chile. Como se pone de manifiesto en este trabajo, diferentes autores alertan del nivel de complejidad creciente que adquiere la tabla estadística desde la educación primaria (Estrella, 2014) y la necesidad de sensibilizar al docente de la importancia de su enseñanza y aprendizaje (Estrella; 2014; Gabucio, Martí, Enfedaque, Gilabert y Konstantinidou; 2010).

El análisis de contenido realizado en los libros de texto nos permite conectar con el proceso de enseñanza recibido por los estudiantes en segundo ciclo de educación básica chilena; en particular, en este trabajo presentamos el avance de resultados de la caracterización del tipo de tabla junto a su nivel de complejidad semiótica. Con los resultados de este trabajo, se pretende concienciar al docente en su labor de planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje de la tabla estadística en la etapa de educación básica. El libro de texto suele ser un recurso de enseñanza ampliamente utilizado por el docente y el estudiante (Alkhateeb, 2019; Herbel, 2007) y la muestra de textos analizados no evidencia una tendencia gradual creciente en la distribución de todos los tipos de tablas estadísticas, según su complejidad semiótica y que requiere atención de los profesores en cuanto al tratamiento de la tabla de doble entrada, en particular, puesto que su complejidad semiótica es alta y su enseñanza se recoge fundamentalmente en 5º curso. Dado el acontecer actual, es necesario que los aprendices se enfrenten al estudio de la estadística y probabilidad desde el tratamiento con datos reales, que sean significativos, y para ello se requiere una adecuada comprensión de los procesos de recolección y tratamiento de la información (Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez, Vásquez y Alsina, 2020).

Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Beca ANID Folio: 72190280.

Referencias

Alkhateeb, M. (2019). The language used in the 8th grade mathematics textbook. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(7), 3-13. https://doi.org/10.29333/ejmste/106111

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Arteaga, P. y Batanero, C. (2011). Relating graph semiotic complexity to graph comprehension in statistical graphs produced by prospective teachers. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 368-377). Rzeszów: ERME.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 25*, 41-58.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Bivar, D. y Selva, A. (2011). Analisando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros didáticos de matemática. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* - XIII CIAEM. Recife, Brasil.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2013). *Research methods in education*. Routledge.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R., y López-Martín, M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de educación primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática, 4*(7), 10-39.

Díaz-Levicoy, D., Ruz, F., y Molina-Portillo, E. (2017). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de tercer año de educación primaria. *Espaço Plural, 18*(36), 196-218.

Duval, R. (2003). Comment analyser le fonctionnement représentationnel des tableaux et leur diversité? *Spirale-Revue de recherches en éducation, 32*(32), 7-31.

Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada, España.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación, 14*(2), 1-23.

Estrella, S. y Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia. In P. Scott y A. Ruíz (Eds.) *XIV CIAEM-IAC-*

ME. Vol. 8: Estadística y Probabilidad (pp.220-225). México: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Estrella, S., Mena-Lorca, A., y Olfos-Ayarza, R. (2017). Naturaleza del objeto matemático Tabla. *MAGIS. Revista Internacional de Investigación en Educación, 10*(20), 105-122.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education 32*(2), 124-158.

Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S. y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación,* 22(2), 183-197.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3-15.

Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 22-25.

Guimarães, G., Gitirana, V., Cavalcanti, M. y Marques, M. (2007). Livros didáticos de matemática nas séries iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. En *IX Encontro Nacional de Edução Matemática*, Belo Horizonte, Brasil: Anais do IX ENEM. CR-ROM.

Herbel, B. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 344-369.

Koschat, M. (2005). A case for simple tables. *The American Statistician, 59*(1), 31-40.

Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale-Revue de recherches en éducation, 32*(32), 143-154.

mecd (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid, España: Autor.

mineduc (2015). *Bases curriculares 7º básico a 2° medio*. Santiago, Chile: Autor.

mineduc (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Santiago, Chile: Autor.

Neuendorf, K. (2016). *The content analysis guidebook*. Londres: Sage.

nctm (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

oecd (2019). *PISA 2018 Mathematics Framework*. Paris: OECD. https://doi.org/10.1787/13c8a22c-en

Ortiz, J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., Vásquez Ortiz, C. A. y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, *104*, 217-238.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248.

ANEXO. Muestra de libros analizados

Curso	Referencia
	Kheong, F. H., Soon, G. K. y Ramakrishnan, C. (2017a). *Texto del estudiante. 5º básico*. Santiago: Marshall Cavendish Education.
5º EB	Kheong, F. H., Soon, G. K. y Ramakrishnan, C. (2017b). *Cuaderno de ejercicios. 5º básico.* Santiago: Marshall Cavendish Education.
	Kheong, F. H., Soon, G. K. y Ramakrishnan, C. (2017c). *Guía didáctica del docente - Tomo 2 - 5º básico*. Santiago: Marshall Cavendish Education.
	Maldonado, L. y Castro, C. (2017). *Texto del estudiante 6º básico*. Santiago: Santillana.
6º EB	Castro, C. (2017). *Cuaderno de ejercicios 6º básico*. Santiago: Santillana.
	Juillet, I. y Martínez, M. (2017). *Guía didáctica del docente - Tomo 2 - 6º básico*. Santiago: Santillana.
	Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante. 7º básico*. Santiago: SM.
7º EB	Santis, M. (2016). *Cuaderno de ejercicios Matemática 7º básico*. Santiago: SM.
	Raydoret del Valle, J. (2016). *Guía didáctica del docente. 7º básico*. Santiago: SM.
	Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante 8º básico*. Santiago: SM.
8º EB	Muñoz, V. y Chacón, A. (2016). *Cuaderno de ejercicios 8º básico.* Santiago: Ediciones SM.
	Muñoz, V. y Manosalva, C. (2016). *Guía didáctica del docente. 8º básico*. Santiago: SM.

CAPÍTULO 2

PROCESOS MATEMÁTICOS EN LA PRÁCTICA ARGUMENTATIVA MEDIANTE EL USO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

MATHEMATICAL PROCESSES IN PRACTICE ARGUMENTATIVE USING DYNAMIC GEOMETRY

Guadalupe Morales Ramírez[1], Víctor Larios Osorio[1],
Norma Rubio Goycochea[2]
gmorales28@alumnos.uaq.mx, vil@uaq.mx, nrubio@pucp.edu.pe
Universidad Autónoma de Querétaro [1],
Pontificia Universidad Católica del Perú [2]

Resumen

El presente estudio forma parte de una investigación más amplia, cuyo interés es analizar los procesos matemáticos puestos en juego por alumnos de un bachillerato mexicano. El objetivo de este estudio es describir algunos procesos matemáticos emergentes en las prácticas argumentativas de alumnos cuando usan la geometría dinámica. Se implementó una secuencia de actividades sobre las isometrías en el plano utilizando el software GeoGebra en el contexto de los teselados o recubrimientos, en el que se pidió a los alumnos construir y argumentar sobre el proceso de construcción desarrollado. El análisis consistió en la identificación y descripción de los procesos matemáticos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Los resultados muestran la riqueza de las prácticas

argumentativas a través de los procesos matemáticos puestos en juego por un grupo de alumnos al utilizar el GeoGebra.
Palabras clave: *procesos matemáticos, prácticas argumentativas, bachillerato, geometría dinámica.*

Abstract

This study is part of a broader investigation, whose interest is to characterize the mathematical processes put into play by students of a Mexican high school. The objective is to describe some emergent mathematical processes in the argumentative practices of high school students when they use dynamic geometry. A sequence of activities on isometries in the plane was implemented using the GeoGebra software in the context of tessellations or coatings, in which students were asked to argue about the construction process developed. The analysis consisted of the identification and description of the mathematical processes proposed by the Ontosemiotic Approach (OSA). The results show the richness of argumentative practices through the mathematical processes put into play by a group of students when using GeoGebra.
Keywords: *mathematical processes, argumentative practices, high school, dynamic geometry.*

1. Antecedentes

Desde la perspectiva Piagetiana el desarrollo de procesos cognitivos se da a través de la imitación, donde puede resultar un proceso que va de la acomodación sensoriomotora a la asimilación y la acomodación mental, lo que caracteriza los comienzos de la representación mental (Piaget, 1961). En el campo de las matemáticas los procesos cognitivos son complejos de evidenciar, por la razón de estar relacionados con el acto de pensar, razonar, inferir, deducir, memorizar, etcétera, los cuales subyacen y se desarrollan en la mente del individuo. Sin embargo, en la actividad matemática es posible analizar procesos matemáticos y valorar la práctica significativa de los alumnos a través de las acciones (operativas o discursivas) desarrolladas en las tareas matemáticas que involucren sus conocimientos y habilidades, donde ellos son capaces de comunicar, validar y generalizar la solución problema (Godino y Batanero, 1994).

De acuerdo con la teoría del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (eos) propuesta por Godino, Batanero y Font (2007), en la resolución de problemas emergen objetos y procesos matemáticos que propician el desarrollo de sistemas de prácticas matemáticas. Dichos autores consideran procesos y megaprocesos (resolución de problemas o modelización) como herramientas de análisis de la práctica matemática, una manera de estudiar estos últimos es a través del análisis de los procesos más simples que lo componen como, por ejemplo, representación, particularización, personalización, institucionalización, argumentación, etc. En este sentido es importante conocer cómo se desarrollan los procesos matemáticos cognitivos en las prácticas matemáticas, una forma es a través de las tareas o actividades que involucran el uso de artefactos (dispositivos artificiales), los cuales se convierten en instrumentos psicológicos que permiten alterar el desarrollo natural de los procesos cognitivos (Vygotsky, 1979). El uso de artefactos es clave para el desarrollo de significados desarrollados en la construcción del conocimiento (Mariotti, 2009), y está ligado a la actividad cognitiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, según Rabardel (2001) el individuo desarrolla un proceso de instrumentación cuando existe la conjugación entre el artefacto y las habilidades cognitivas necesarias implementadas para potenciar la herramienta o el artefacto.

1.1. La Geometría Dinámica como medio para la generación de argumentos

Un referente internacional como la National Council of Teachers of Mathematics resalta que el uso de las tecnologías digitales es parte esencial en el aprendizaje y la enseñanza; estas influyen en la matemática que se enseña y potencia el aprendizaje de los alumnos (NCTM, 2000). En este contexto, las tecnologías digitales vienen a ser un medio por el cual los alumnos podrían ampliar y transformar sus significados matemáticos, así como representar y acceder a los objetos matemáticos.

Por otra parte, la argumentación matemática como parte de la actividad matemática de los alumnos sigue siendo primordial en los procesos de enseñanza y aprendizaje, esto se ha visto reflejado en diversas investigaciones y eventos, como, por ejemplo el 19th ICMI Study Proof and Proving in Mathematics Education, en el que diversos autores se han ocupado de aportar elementos desde el enfoque cognitivo, epistemológico o semiótico en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y demostración matemática escolar (Hanna y Villiers, 2012). La importancia de usar herramientas digitales para fomentar y desarrollar el proceso de argumentación (Radford, 2006; Bussi y Mariotti, 2008; Karadag y McDougall, 2011; Mejía y Molina, 2013; Toulmin, 2003), con miras a provocar en los alumnos un razonamiento lógico deductivo que vislumbre el desarrollo de la demostración matemática (Douek, 2007; Duval, 1999; Knipping, 2008; Larios, 2018). Por tanto, la argumentación es un proceso fundamental para el aprendizaje de las matemáticas y resulta una vía por la cual abordar el estudio y su relación con otros procesos matemáticos propuestos por el EOS.

Por otra parte, el uso de herramientas digitales ha fungido como un medio para favorecer el desarrollo de las prácticas de argumentación y demostración matemática (Mariotti, 2000). En particular, la geometría dinámica "puede ser utilizado como medio para que el alumno siga un proceso no necesariamente lineal (avances y retrocesos), que le lleve a desarrollar habilidades de razonamiento y de observación al permitir diferenciar progresivamente entre dibujo (representación) y figura (relación conceptual entre dibujo y objeto geométrico)" (Larios, Pino-Fan y González, 2017, p. 43). Así el uso de un software de geometría dinámica ofrece a los alumnos la oportunidad de explorar, realizar conjeturas e involucrarlos a un proceso de formulación, prueba y reformulación de ideas matemáticas. El proceso de argumentación y su relación con otros procesos matemáticos son aspectos para considerar en el desarrollo de la práctica argumentativa, por el papel normativo y regulativo que desempeña de las matemáticas (Molina, 2019).

2. Contexto de la problemática

En el sistema educativo mexicano los planes y programas curriculares del nivel medio (alumnos de 15 a 18 años), ponen de manifiesto que los alumnos deben ser competentes para argumentar la solución de problemas a través de un razonamiento lógicamente estructurado, con el fin de desarrollar capacidades cognitivas (SEP, 2017). Asimismo, dentro del marco curricular común que comparten todas las instituciones de bachillerato, se enfatiza en la competencia de: ***argumentar la solución de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación***, lo que conlleva al desarrollo de habilidades digitales como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas. No obstante, la práctica del profesor sigue siendo parte fundamental para que los alumnos desarrollen habilidades y conocimientos sobre el uso de tecnologías digitales, teniendo en cuenta que estas no se limitan al uso de sí mismas, sino que también soportan una trayectoria de organización de ideas y creencias de lo que representan en el ambiente escolar (Moreno, 2017).

Por tanto, es necesario que la educación escolarizada tenga en cuenta el desarrollo de procesos matemáticos (particularización, generalización, definición, representación, argumentación, etc.) durante el proceso instruccional de los alumnos. En este estudio es de interés describir procesos matemáticos propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), mediante el análisis de la práctica argumentativa de los alumnos del nivel medio en el contexto geométrico. Para ello, se toma en cuenta el uso del software de geometría dinámica GeoGebra como un medio que fomenta el desarrollo de prácticas argumentativas de los alumnos de este estudio, por cuestión de espacio se muestra la identificación de procesos matemáticos de una pareja de alumnos, así como la descripción general de la práctica desarrollada referente a una de las actividades propuestas.

3. Herramientas teóricas metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS)

La necesidad de desarrollar teorías instruccionales que permitan articular diversas nociones teóricas sobre el análisis del conocimiento, su enseñanza y aprendizaje, es de mayor importancia para la reflexión sobre ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? ¿qué se podría mejorar? en el ámbito de la Educación Matemática. Una teoría que ha ganado presencia e intenta responder a dichas cuestiones, corresponde a las herramientas teóricas metodológicas del *Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos* (EOS) propuesto por Godino y colaboradores. En este estudio dicha teoría cobra relevancia sobre las prácticas matemáticas y la configuración de objetos y procesos matemáticos. Desde esta perspectiva, las *prácticas matemáticas* son aquellas acciones (operativas) realizadas por un individuo durante la resolución de un problema matemático y las comunicaciones (discursivas) que se hace de la solución, con el fin de validar y generalizar en otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Tomando en cuenta lo anterior, se asume que la ***práctica argumentativa*** se realiza cuando el alumno desarrolla una práctica matemática (operativa o discursiva) referente a una situación problema, la cual requiere de una justificación, validación, descripción, explicación, argumentación o demostración en el proceso de solución del problema, en el que puede o no manifestar un razonamiento lógico – deductivo (Morales, Rubio y Larios, en prensa). Así, en el desarrollo de las prácticas argumentativas realizadas por un individuo intervienen y emergen una red deobjetos y procesos matemáticos, lo que se conoce en el EOS por ***configuración ontosemiótica*** (Font y Godino, 2006). Dado que el énfasis está puesto en el proceso de argumentación, se tiene en cuenta que cuando el alumno aborda una tarea matemática o situación problema (entrada), cuya consigna es la inclusión de una explicación, justificación, validación, argumentación o demostración y cuyo producto o respuesta (salida) es lo que se llama en el EOS un ***argumento*** de la configuración ontosemiótica.

La configuración ontosemiótica del EOS permite integrar los objetos matemáticos primarios (situaciones problema, definición, lenguaje, procedimientos, propiedades y argumentos) en un sistema de prácticas (operativa y discursiva). Según Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016) estos objetos pueden ser analizados desde cinco pares de puntos de vista duales, según su función contextual y funcional en las prácticas matemáticas, así como de los procesos matemáticos relacionados. Estas configuraciones pueden ser epistémicas y cognitivas, la primera se relaciona con la red de objetos matemáticos emergentes e intervinientes en el sistema de prácticas de la institución. Mientras que, la configuración cognitiva corresponde al sistema de prácticas desarrolladas por el individuo. En la Figura 1, se muestra la relación de objetos matemáticos primarios presentes en una configuración ontosemiótica.

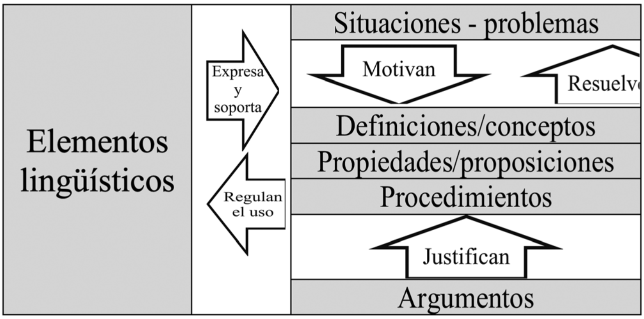


Figura 1. Configuración ontosemiótica de los objetos matemáticos
Fuente: Font y Godino (2006, p. 69)

Desde la perspectiva del EOS, la noción de proceso matemático refiere a la "idea de una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada), estas tareas están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas" (Rubio, 2012, p.107). El ***proceso matemático*** nos permite explorar el funcionamiento dinámico de la configuración ontosemiótica activada en la práctica matemática. El EOS considera una lista de dieciséis procesos matemáticos, seis de ellos (comunicación, argumentación, algoritmización, enunciación, definición y problematización) podríamos relacionarlos con los objetos matemáticos primarios (lenguaje, argumento, procedimientos, definiciones, proposiciones y situaciones problema) que emergen y estructuran la configuración ontosemiótica. Mientras que el resto de los procesos matemáticos se agrupan en facetas duales (institucional - personal, ostensivo – no ostensivo, unitario – sistémico, expresión – contenido, extensivo – intensivo), como una forma de "estar participando" en el desarrollo de la práctica matemática. Tanto las dualidades como los objetos matemáticos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso – producto, lo que corresponde a los procesos de la Figura 2.

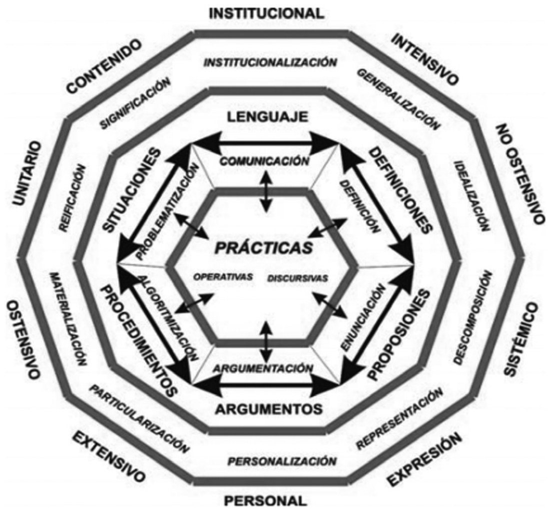


Figura 2. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático
Fuente: Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016)

4. Consideraciones metodológicas

La investigación se centra en un estudio de caso (Steak, 1999), particularmente sobre parejas de alumnos en un ambiente escolar, donde se promueve la necesidad de que los alumnos del nivel medio expresen sus propios argumentos mediante el uso de la geometría dinámica. Por lo que se consideró la observación del tipo participante en el marco del método cualitativo – descriptivo. El estudio se realizó con 20 alumnos de la escuela de bachilleres de la Universidad Autónomas de Querétaro (UAQ), los cuales cursaban la asignatura de Geometría Analítica correspondiente al cuarto semestre. Para la recolección de datos referente a los argumentos de los alumnos, donde se identificaron procesos matemáticos, se realizó una propuesta de actividades centradas en la construcción de teselados regulares y semirregulares en el plano, aplicando algunas herramientas del software GeoGebra, primordialmente el de las transformaciones isométricas (traslación rotación y simetría axial). En este experimento de enseñanza se parte del hecho de que los alumnos no cuentan con amplio conocimiento sobre el uso de las herramientas requeridas del software GeoGebra, por lo que nuestra propuesta de actividades contempla los conocimientos previos y fomenta la argumentación matemática en el contexto geométrico, con el fin de lograr que los alumnos construyan los teselados regulares y semirregulares. Cabe resaltar que el papel del investigador se centró en apoyar el desarrollo de actividades respecto al uso del software y dudas relacionadas con las situaciones propuestas.

4.1. Organización didáctica de las actividades propuestas

Los recubrimientos o teselados en el plano se consideran un medio didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías, este tema puede ser abordado mediante el uso de material manipulable o de la geometría dinámica, por ejemplo, el software GeoGebra. Aquí se aborda el estudio de las isometrías en el plano mediante la construcción de teselados utilizando el software GeoGebra. Para lo cual, se desarrolló una secuencia de actividades que fomentan la argumentación matemática y cuyo objetivo central es construir teselados, regulares y semirregulares, y argumentar su proceso de construcción. La secuencia de actividades (cinco actividades) se trabajó en parejas en un laboratorio de matemáticas de la institución antes mencionada, las cuales se desarrollaron bajo el siguiente esquema:

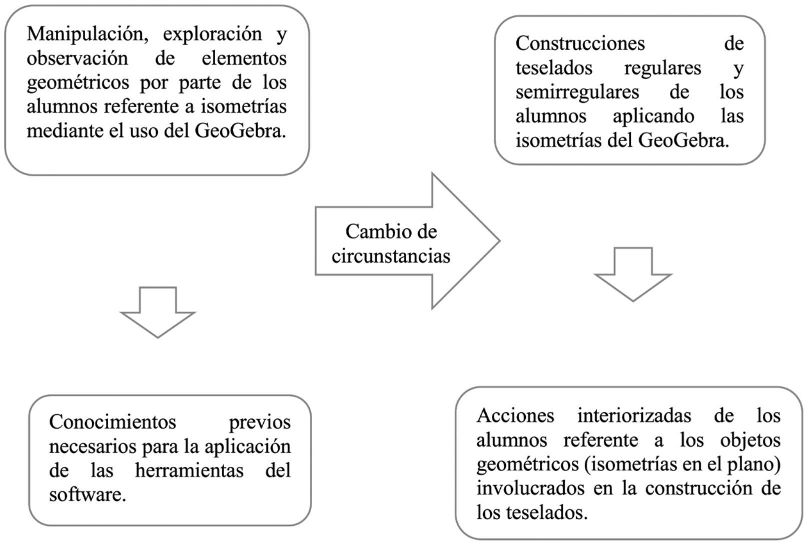


Figura 3. Organización general de la propuesta de actividades

Fuente: Elaboración propia.

4.2. Descripción general de la propuesta de actividades

A continuación, se describe de manera general la propuesta de actividades, aunque aquí solo se hace referencia a la actividad que se centra en la construcción de teselados semirregulares.

> *Actividad 1*: se plantean situaciones que involucran la clasificación y justificación de algunos polígonos regulares, esto a partir de la representación gráfica del polígono. Como parte de los conocimientos previos que poseen los alumnos.
>
> *Actividad 2*: se proporcionan archivos dinámicos (applets) referentes a las isometrías en el plano y se plantean situaciones (preguntas) que incluyen la exploración y la manipulación de herramientas que involucran las isometrías, con el fin de que los alumnos conceptualizarlas.

Actividad 3: se explicitó la noción de teselado regular y se pidió a los alumnos construir y justificar el proceso de construcción, mediante la aplicación de las isometrías del GeoGebra.

Actividad 4: se explicitó la noción de teselado semirregular y se pidió a los alumnos construir y justificar el proceso de construcción, mediante la aplicación de las isometrías del GeoGebra.

Actividad 5: se incluyó dibujos y applets referente a teselados irregulares, se pidió a los alumnos la manipulación y exploración para identificar cuándo una construcción cumplía con la definición de teselado y qué herramientas isométricas estaban involucradas en los applets.

5. Análisis y resultados

A continuación, se muestran el análisis de las prácticas argumentativas de una pareja de alumnos referente a la actividad que involucra la construcción de teselados semirregulares, así como los procesos matemáticos identificados en dichas prácticas, los cuales se identificaron de acuerdo con los propuestos por el marco del EOS. La Tabla 1 muestra los procesos matemáticos que se identificaron en 10 parejas de alumnos fueron: significación (S), descomposición (D), Enunciación (E), particularización (Pa), personalización (Pe), representación (R), materialización (M), visualización (V), definición (De) e idealización (I). Por cuestión de espacio, en la Tabla 1 se muestra los procesos matemáticos identificados en este estudio correspondiente a la actividad que se centró en la construcción de teselados semirregulares. Además, se usó el símbolo de guion (-) para representar que la situación presentada al alumno no se identificó algún proceso matemático.

Tabla 1. Procesos matemáticos identificados en la actividad 4 (Fuente: Elaboración propia)

Procesos matemáticos										
A4	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**
S1	M	I, M	M	M	M	M	M	-	I	M
S2	S, V	V	-	De, M, Pa, S	-	V	M	-	M, S	S, V
S3	M	M	M	M, R	-	M	M	M	M	M
S4	S, M	M	M	-	-	M	M	M, V	M	M
S5	S	S	S	-	-	R, S	M, R	V	S	S
S6	M	M	M	-	-	M	M	M	M	M
S7	S	S	S	M	-	S	V	S	S	S
S8	M	M	M	-	-	M	-	M	M	M
S9	S	S	S	M	M	S	I	-	S	S

En la tabla 1 el proceso matemático recurrente fue el de materialización, el cual se relaciona con la dualidad ostensivo – no ostensivo, generalmente no perceptibles. Sin embargo, son usados en las prácticas a través de sus ostensivos asociados, por ejemplo, símbolos, gráficos, notaciones, etc. (Font y Contreras, 2008). En el proceso de materialización está estrechamente relacionado con el proceso de idealización puesto que se puede pasar de un objeto ostensivo a un objeto no ostensivo, y para operativizar estos objetos es necesario hacer uso de representaciones ostensivas, lo que conlleva a un proceso de materialización.

En esta realidad, los alumnos destacan en gran medida el proceso de construcción donde a través del software mediatizan y materializan el pensamiento, es decir, el proceso de materialización sitúa el conocimiento matemático en el campo del artefacto (Radford, 2006). En este estudio resaltamos el proceso de materialización, el cual fue identificado cuando los alumnos propusieron, a lápiz y papel, la combinación de polígonos regulares que utilizarían en la construcción de teselados semirregulares, pero también cuando aplicaron las herramientas del GeoGebra para la construcción, por ejemplo, la traslación, la simetría axial, los vectores, los ángulos de rotación, etc. Sin embargo, aunque las herramientas del software se materializaron en la construcción, en el proceso de construcción, pocos de los alumnos explicaron correctamente su procedimiento recurriendo a un proceso de visualización a través de un lenguaje informal. Según el EOS, son prácticas visuales o prácticas no visuales, en donde se pone en juego la percepción visual y puede ser solo mental (objetos no ostensivos) o ser objetos perceptibles mediante una representación física (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012).

5.1. Procesos matemáticos identificados en la práctica argumentativa

A continuación, se ejemplifica algunos procesos matemáticos de una pareja de alumnos de este estudio, correspondiente a la actividad que involucra la construcción de teselados semirregulares. Los alumnos respondieron las tareas propuestas en las cuales no solo se pedía las construcciones de los teselados sino la justificación de estas mismas, como parte de su práctica argumentativa, donde tenían que explicitar la secuencia de pasos para la construcción de los teselados. Para identificar los procesos matemáticos en estas prácticas emergentes de los alumnos, se tomó en cuenta un análisis a priori de los mismos.

Las siguientes tareas ejemplifican el proceso de materialización, personalización, visualización y significación, los cuales emergieron en la justificación y construcción del teselado semirregular, compuesto por triángulos, cuadrados y hexágonos. En la Figura 4 se muestra el proceso de materialización, cuya tarea se relacionan con dibujar y construir combinaciones de polígonos regulares para que generen un teselado semirregulares tanto a papel y lápiz como en el software GeoGebra. El proceso de materialización se relaciona con el hecho materializar polígonos regulares a través de una representación figural (dibujo) de un teselado semirregular. Así como la representación dinámica, aunque este no representa correctamente un teselado semirregular.

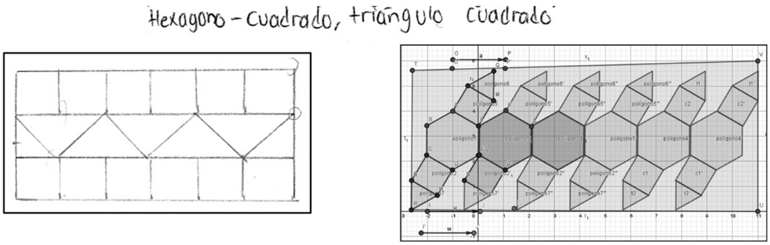


Figura 4. Ejemplo del proceso de materialización

En la Figura 5 se muestra el proceso de personalización y visualización, el cual corresponde a la tarea de describir el proceso de construcción del teselado semirregular seguido por los alumnos, usando triángulos, cuadrados y hexágonos. El proceso de personalización se relaciona con el significado que pone en uso de las herramientas aplicadas del software, esto a través del desarrollo de un proceso de visualización, es decir, mediante la percepción visual y usando un lenguaje informal son capaces de evidenciar una interpretación de su proceso de construcción del teselado.

- Creamos un cuadrado.
- Un vector en uno de sus lados.
- Lo multiplicamos con la herramienta de traslación.
- seguimos los mismos pasos con las otras figuras buscando que encajen perfectamente.

Figura 5. Ejemplo del proceso de personalización y visualización

La figura 6 muestra un proceso de significación y visualización, donde la tarea consiste en la justificación de un teselado semirregular a través de la definición su definición donde se involucra la manipulación del software. El proceso de significación se asocia a la definición no ostensiva de un teselado semirregular, misma que los alumnos ponen de manifiesto al decir "acoplar", además, la percepción visual es puesta en juego en un momento dado, a lo que resulta la evidencia de un proceso de visualización.

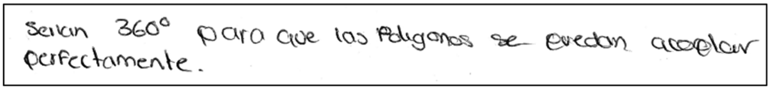

Serian 360° para que los Poligonos se puedan acoplar perfectamente.

Figura 6. Ejemplo del proceso de significación y visualización

5.2. Configuraciones ontosemióticas en el estudio de las isometrías en el plano

La Figura 7 muestra la configuración cognitiva asociada a una pareja de alumnos, la cual constituye la relación de objetos matemáticos primarios que emergieron durante el desarrollo de prácticas argumentativas de los alumnos, correspondiente a la construcción de teselados semirregulares.

Elementos lingüísticos:

Verbal:
Lenguaje común (formal o informal)

Gráfico - software:
Uso de herramientas del software para generar dinamicidad en el applet

Expresa y soporta

Regulan el uso

Situaciones:
Construir teselados semirregulares aplicando herramientas del GeoGebra y justificar el proceso de construcción

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas:
- Polígono regular
- Teselado semirregular
- Ángulo interior de un polígono
- Triángulo equilátero

Definiciones/conceptos:
Emergentes:
- Transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión o simetría axial)

Propiedades/proposiciones:
- La suma de los ángulos en cada vértice del teselado es un ángulo de 360°
- El ángulo interior del polígono regular debe ser divisor de 360° para que forme un teselado regular

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
- Representación gráfica de polígonos regulares
- Representación gráfica de un teselado semirregular

Emergentes (matemáticos):
- Dibujar la combinación de polígonos regulares que conllevan la representación de un teselado semirregular.
- Cálculo de la medida del ángulo formado en cualquier vértice de un teselado semirregular.

Previos (software):
- Aplicación de herramientas que permiten la construcción del teselado semirregular formado por triángulos equiláteros y cuadrados

Emergentes (software):
- Construcción de un teselado semirregular utilizando triángulos equiláteros y cuadrados aplicando transformaciones isométricas, traslación , rotación o simetría axial
- Validación de la construcción del teselado semirregular a través de la herramienta de "arrastre"

Justifican

Argumentos:
- Mediante la manipulación y exploración de un teselado triangular, se argumenta que la medida del ángulo en cada vértice del teselado es de 360°
- Se justifica la construcción del teselado a través de la aplicación de las transformaciones isométricas y se valida cuando se aplica la herramienta de arrastre en cualquiera de los polígonos originales

Figura 7: Configuración cognitiva de una pareja de alumnos referente a las isometrías en el plano

6. Conclusiones y reflexiones finales

La identificación de procesos matemáticos del EOS permiten vislumbrar el tipo de prácticas argumentativas y el desarrollo de los objetos matemáticos puestos en juego de los alumnos de este estudio, cuando argumentan mediante el uso del GeoGebra. Esto nos lleva a reflexionar sobre el diseño de actividades que los docentes debieran fomentar tanto en la argumentación matemática, en un ambiente dinámico, como al planteamiento de situaciones que permita evidenciar procesos matemáticos en el desarrollo de estas prácticas.

Es necesario resaltar que el uso del software GeoGebra en este estudio evidenció un proceso discursivo de los alumnos que va acompañado de la práctica argumentativa, aunque este haya sido a través de un lenguaje informal. Además, los alumnos no relacionaron ni comprendieron las propiedades matemáticas involucradas en la construcción, lo cual desembocó en argumentos anclados a propiedades propiamente del software. Por ejemplo, al afirmar que con cualquier polígono regular se podría formar un teselado de tal manera que estos se "acoplaran perfectamente", deja entre ver que la percepción visual juega un papel relevante en el desarrollo de la construcción, pero no en la argumentación del proceso de construcción. Por lo tanto, es necesario que el alumno comprenda la lógica de un software dinámico para realizar cualquier construcción geométrica, para ello se requiere que haya un conocimiento de propiedades o definiciones involucradas en tal proceso de construcción.

Ante esta realidad, es evidente y pertinente dar un seguimiento de los procesos matemáticos-cognitivos que manifiestan los alumnos durante su aprendizaje de la matemática mediante el uso de la geometría dinámica. Los procesos matemáticos identificados parcialmente, hasta el momento en esta investigación, ayudan a marcar una pauta para realizar un rediseño de las actividades que permita evidenciar otros procesos matemáticos del EOS y en particular su relación con el proceso de argumentación, más aun, cuando se involucra una reflexión sobre qué tipos de argumentos podrían manifestar los alumnos desde la perspectiva de dicha teoría. El análisis superficial de los procesos matemáticos fue una limitante para profundizar en ellos, en el sentido de detallar cómo se dio su desarrollo y desencadenamiento de estos en el estudio. Esto se debió a que nos enfocamos en indagar sobre los procesos matemáticos cognitivos en un grupo de alumnos y no sobre unas parejas de alumnos en particular, aunque esto siempre se tuvo en cuenta. Esto nos lleva a replantear tanto el diseño como la implementación de las actividades propuestas.

Referencias

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education September/October. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Disponible en: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html.

Bussi, M. y Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd edition). pp. 746-783.

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero, *Theorems in the schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 163-181). Sense Publishers.

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Disponible en: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67-98.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 33-52.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135.

Godino, J. Gonzato, M., Cajaraville, A. y Fernández, T. (2012) Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 109-130.

Godino, J., Wilhelmi, M., Blanco, T., Contreras, Á. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (10), 91-110.

Hanna, G. y De Villiers, M. (2012). Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI study. Springer Netherlands.

Karadag, Z. y McDougall, D. (2011). GeoGebra as a cognitive tool. En *Model-Centered Learning* (pp. 169-181). Sense Publisher.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom. *ZDM Mathematics Education*, *41*(4), 427-441.

Larios, V., Arellano, C. y González, N. (2018). Análisis de argumentos producidos por alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *7*(3), 280-310.

Larios, V., Pino-Fan, L. y González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 39-57.

Mariotti, A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM*, *41*(4), 427-440.

Mejía, C. y Molina, O. (2014). Mediación y Geometría Dinámica: una alternativa para involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa en geometría. *Revista Científica*, 660-664.

Morales, G., Rubio, N. y Larios, V. (2021) Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* (en prensa).

Molina, O. (2019). Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación. (Tesis doctoral). Universidad de los Lagos. Chile.

Moreno, H. (2017). Encrucijada del discurso matemático escolar contemporáneo: conocimientos profesionales del profesor, tecnologías digitales y prácticas socioculturales. En Hernandez, L. y Slisko, J. (Ed.), *Avances en la educación matemática basada en la investigación*. (Primera edición). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

National of Council Teachers of Mathematics (nctm). (2000). Principles standards for school mathematics, NCTM. *Reston, VA*.

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño: imitación, juego y sueño*. Editorial. Fondo de cultura Económica. México.

Rabardel, P. (2001). Instrumented mediated activity in situations. En Blandford A., Vanderdonckt J., Gray P. (eds). *People and computers XV-interactions without frontiers*, pp. 17-30. Berlín: Springer-Verlag.

Radford. L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103-129.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona. España.

SEP. (2017). El modelo educativo; el planteamiento pedagógico de la Reforma Educativa, Ciudad de México: MAG Edición en Impresos y Digitales, S.C.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Toulmin, E. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Península.

Vygotsky, L. (1979) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LECCIONES DE LIBROS DE TEXTO SOBRE PROPORCIONALIDAD BASADO EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

DIDACTIC ANALYSIS OF TEXTBOOK LESSONS ON PROPORTIONALITY BASED ON THE ONTOSEMIOTIC APPROACH. IMPLICATIONS FOR TEACHER TRAINING

María José Castillo Céspedes[1], María Burgos Navarro[2]
mariajosecastilloc.@gmail.com, mariaburgos@ugr.es
[1]universidad de costa rica, [2]universidad de granada

RESUMEN

Todo profesor debe ser capaz de analizar procesos instruccionales propios y de otros, detectando sus fortalezas, debilidades y potenciales conflictos relativos al conocimiento matemático y en general al ámbito cognitivo, afectivo e instruccional, permitiéndole hacer adaptaciones razonadas para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje analizado. En este trabajo, se plantea la necesidad de promover en los futuros profesores la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En particular del proceso instruccional implementado que plantea un determinado autor cuando crea una lección de libro de texto en

el tema de proporcionalidad. Se trata de implicar al futuro docente en el análisis de lecciones de libros de texto y reflexionar sobre su gestión de uso.
Palabras claves: *análisis didáctico, idoneidad didáctica, libros de texto, formación de profesores, proporcionalidad.*

Abstract

Teachers must be able to analyze their own and others' instructional processes, detecting their strengths, weaknesses and potential conflicts related to mathematical knowledge and in general to the cognitive, affective and instructional environment. This allows them to make reasoned adaptations to optimize the teaching and learning process under analysis. Through a textbook lesson, the author plans an instructional process, which the teacher who decides to use it as a resource, must be able to analyze and manage. In this work, we raise the need to promote in future teachers the competence of analysis and assessment of the didactic suitability of instructional processes planned in textbook lessons, using as a resource mathematics texts on the subject of proportionality.
Keywords: *didactic analysis, didactic suitability, textbooks, teacher training, proportionality.*

1. Introducción y antecedentes

A pesar de que el libro de texto se ha convertido en un importante objeto de estudio en los últimos años en el ámbito de la Educación Matemática (Fan, Zhu y Miao, 2013), la mayoría de los trabajos de investigación son de índole descriptivos (Fan, 2013) y pocos de ellos contemplan el análisis global de lecciones de libros de texto para temas específicos de matemáticas (Castillo, 2019).

El libro de texto escolar es un material que presenta unas características peculiares: es un mediador del aprendizaje del estudiante, pero también se ha configurado como el material curricular de uso preferente del profesorado. Por ello el análisis del libro de texto ofrece enormes posibilidades en la formación inicial de profesionales de la educación (Braga y Belver, 2016). En este sentido, diversos autores plantean que desde la formación de profesores se debe asumir la responsabilidad de promover en los docentes la capacidad de analizar los problemas incluidos en los libros, la identificación de objetos matemáticos que intervienen, así como las posibles dificultades de comprensión. Se trata de garantizar que los profesores dispongan de criterios y herramientas para hacer un uso adecuado de dicho material (Beyer y Davis, 2012; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

En este trabajo nos interesa especialmente el tema de la proporcionalidad, dado que muchos estudiantes y profesores muestran dificultades en diferentes aspectos relacionados al desarrollo del razonamiento proporcional (Weiland, Orrill, Nagar, Brown y Burke, 2020), que pueden guardar una estrecha relación con el tratamiento inadecuado que recibe la proporcionalidad en los libros de texto de matemática (Shield y Dole, 2013).

Partiendo de que el análisis de libros de texto debe ser una de las competencias contempladas en la formación de profesores, el interés de nuestra investigación se centra en diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas para que los profesores en formación sean capaces de: analizar la idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto de matemáticas en el tema de proporcionalidad, plantear juicios razonados en base a tal análisis, así como concretar aspectos referentes a la gestión de uso de dicho recurso que incremente la idoneidad didáctica del proceso de instrucción planificado. Esto requiere elaborar herramientas teórico-metodológicas que permitan al futuro profesor o profesor en ejercicio contar con pautas para analizar la idoneidad didáctica (Godino, 2013) de una lección de un libro de texto para abordar un tema de matemáticas. Así, de manera previa a las experiencias formativas con futuros docente desarrollamos la Guía de Análisis de Lecciones de Libros de Texto de Matemáticas (GALT-Matemáticas) (Castillo, Burgos y Godino, 2020) como instrumento de utilidad en la toma de decisiones fundamentadas sobre el uso de la lección de un libro de texto en el aula. Esta guía después la particularizamos al tema de la proporcionalidad (GALT-Proporcionalidad).

Nuestro estudio permitirá profundizar en las dificultades que presenten los profesores, tanto en relación a la consecución de la competencia de análisis de libros de texto como de conocimientos didácticos-matemáticos del tema de proporcionalidad. La posibilidad de abordar dichas dificultades de manera oportuna mediante la reflexión y discusión conjunta de los resultados, particularmente permite el planteamiento de mejoras progresivas en el diseño de futuras intervenciones.

2. Problemática, preguntas y objetivos de investigación

Las cuestiones de investigación a las cuales pretendemos dar respuesta se describen a continuación:

> ¿Qué instrumentos de análisis didáctico se han desarrollado en investigaciones previas para realizar un análisis sistemático de libros de texto de matemáticas?
>
> ¿Qué elementos se deben tener en cuenta para realizar un análisis didáctico sistemático de los libros de texto de matemáticas usados en educación primaria y secundaria?
>
> ¿Qué tipo de estrategias formativas se deberían diseñar e implementar para capacitar a los futuros profesores de educación primaria y secundaria en el análisis crítico y constructivo de lecciones de libros de texto de matemáticas?

El objetivo general de la investigación que presentamos se puede formular como sigue:

> *Promover en los futuros profesores de educación primaria y secundaria la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción, utilizando como recurso las lecciones de libros de matemáticas en el tema de proporcionalidad.*

Este objetivo, se concreta en los siguientes objetivos específicos:

OE1: Realizar una revisión sistemática de las investigaciones previas sobre metodologías de análisis de libros de texto de matemáticas y su uso en la formación de profesores.

OE2: Optimizar un instrumento para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto de matemáticas que tenga en cuenta las facetas y componentes que propone la Teoría de la idoneidad didáctica para los procesos de instrucción matemática (GALT-Matemáticas).

OE3: Mejorar el instrumento para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto en el tema de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria (GALT-Proporcionalidad).

OE4: Aplicar el instrumento GALT-Proporcionalidad a lecciones sobre proporcionalidad de una muestra de libros de texto (las usadas en la formación de profesores).

OE5: Diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas con profesores de educación secundaria para desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto aplicando la GALT-Proporcionalidad.

OE6: Diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas con profesores de educación primaria para desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto aplicando la GALT-Proporcionalidad.

3. Marco Teórico.

Adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino y colaboradores basado en las herramientas teórico-metodológicas del EOS (Godino et al., 2017). En este modelo se considera la sub-competencia de *análisis y valoración de la idoneidad didáctica* de los procesos de instrucción, donde la noción de idoneidad didáctica constituye una herramienta que apoya la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva. La consideración de la lección de un libro de texto como un “proceso instruccional planificado” permite aplicar las distintas herramientas teóricas elaborados en el EOS para realizar un análisis sistemático de lecciones de los libros de texto.

4. Metodología

El enfoque metodológico corresponde a la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado como propone el EOS (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). Además, se sigue una metodología de análisis de contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2011) en cuanto la elaboración de las guías precisa recopilar, analizar y sistematizar conocimientos didáctico-matemáticos resultado de las investigaciones educativas sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, así como en el análisis de los informes producidos por los futuros docentes en cada intervención.

5. Avances del proyecto de investigación, análisis y resultados

En este apartado resumimos los avances fundamentales en el proyecto de investigación descrito, poniendo el énfasis en la consecución de los objetivos específicos descritos en la sección previa. En relación con el OE1, se ha llevado a cabo una revisión de investigaciones previas sobre análisis de libros de texto de matemáticas y sobre formación de profesores en el análisis de libros de texto. Dicha revisión bibliográfica nos deja subrayar, entre otros aspectos, que debido a que el uso del libro de texto en el aula aparece vinculado a una labor profesional docente que implica que éste adquiera un posicionamiento crítico (Braga y Belver, 2016; Monterrubio y Ortega, 2012), este recurso puede constituir una fuente de aprendizaje para los docentes (Ball y Cohen, 1996; Ball y Feiman-Nemser, 1988; Grossman y Thompson, 2008; Nicol y Crespo, 2006; Remillard, 2000).

Se acepta que parte de la labor docente es utilizar de manera crítica y responsable los materiales curriculares, entre ellos el libro de texto, como guía para el diseño instruccional. De esta manera, el profesional en el área podrá tomar decisiones pedagógicas basadas en la interpretación critica del contenido del texto, entre ellas, realizar las adaptaciones pertinentes que ayuden a solventar las posibles limitaciones que estos presenten cuando se aborda el aprendizaje y la enseñanza de un contenido específico (Brown, 2009; Choppin, 2011; Drake y Sherin, 2009; Thompson, 2014; Yang y Liu, 2019).

Existen evidencias de que estas tareas pueden suponer dificultades a los docentes, especialmente para aquellos que poseen poca experiencia laboral debido a su recién incorporación en la práctica docente (Beyer y Davis, 2012). Por ejemplo, diversas investigaciones señalan que los docentes noveles suelen pasar por alto potenciales conflictos en cuanto al contenido matemático que pueden presentar algunos libros de texto, empleándolos en la planificación de procesos de instrucción sin realizar cambios o bien realizando cambios que alteran su sentido (Ball y Feiman-Nemser, 1988; Grossman y Thompson, 2008; Nicol y Crespo, 2006; Yang y Liu, 2019). Autores como Lloyd y Behm (2005) o Schwarz et al. (2008), apuntan a que cuando los docentes realizan un análisis de los libros de texto en base a sus propios criterios, suelen hacerlo de manera intuitiva y holística y no de forma analítica o critica Así, se suele reconocer en este campo de investigación la necesidad e importancia de incorporar herramientas de análisis en el diseño de actividades formativas, que permitan guiar a los docentes en la identificación de fortalezas y debilidades de los materiales curriculares y realización de cambios oportunos (Beyer y Davis, 2012; Braga y Belver, 2016; Lloyd y Behm, 2005; Schwarz et al., 2008; Shawer, 2017).

Tomando en cuenta dicha recomendación, para lograr los objetivos OE2 y OE3, en Castillo, Burgos y Godino (2020) se describe la elaboración de una guía de análisis de libros de textos de matemáticas (GALT-Matemáticas) fundamentada en la Teoría de la Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2017; Godino, 2013; Godino et al., 2012) cuyos indicadores en cada una de las facetas han sido reanalizados y enriquecidos con la revisión de antecedentes sobre el análisis de libros de texto. La GALT-Matemáticas incorpora los aspectos más relevantes como criterios específicos para valorar la idoneidad didáctica global de una lección de un libro de texto previamente elegida para implementar el proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico. La guía se presenta como una herramienta que facilita al profesor la toma de decisiones sobre cómo usar una lección de libro de texto en el aula para optimizar el proceso instruccional, constituyendo un instrumento que, al ser aplicada y discutida por los formadores de profesores, los propios profesores e investigadores, admite su progresiva mejora.

En relación al OE3, como sugieren Breda et al. (2017) los criterios e indicadores de idoneidad deben enriquecerse y adaptarse de acuerdo al contenido matemático específico que se pretende enseñar. Por ello era necesario identificar en las investigaciones didácticas sobre enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria, resultados que se pudieran interpretar como indicadores de idoneidad didáctica de los procesos de instrucción sobre dicho contenido matemático. Así la elaboración y optimización de la Guía de Análisis de Lecciones de libro de Texto en el tema de proporcionalidad (GALT-Proporcionalidad), se basa en la incorporación de conocimientos didáctico-matemáticos resultados de diversos estudios que tratan este contenido en las distintas facetas: *epistémica* (Aroza et al., 2016; Fernández, 2001; Fernández y Linares, 2012; Lamon, 2007; Lin, 2018; Shield y Dole 2013), c*ognitiva* (Misalidou y Williams, 2003; Van Dooren et al., 2009, entre otras), *afectiva* (Beltrán-Pellicer y Godino, 2019; Burgos y Godino, 2018; Martínez, 2015; entre otras), *instruccional* (Fernández, 2001; Monchón, 2012; Obando et al., 2014; entre otras), *ecológica* (MECD, 2014a; MECD, 2014b; Wilhelmi, 2017; entre otras).

Para abordar el objetivo OE4, se ha aplicado la GALT-Proporcionalidad al análisis de dos lecciones de libros de texto, las cuales se descomponen en unidades de análisis (configuraciones didácticas) para su valoración en cada faceta. Las lecciones seleccionadas fueron:

- Lección de proporcionalidad para 1º ESO de Arias y Maza (2015), descompuesta en cuatro unidades de análisis: la primera corresponde a la razón y porcentaje, la segunda unidad, refiere a la proporcionalidad directa; la unidad tres concierne a la proporcionalidad inversa y la última unidad de análisis trata de porcentajes.

- Lección de libro de texto de proporcionalidad de 6º curso de educación primaria (González et al., 2015), dividida en 3 configuraciones didácticas: magnitudes proporcionales, reducción a la unidad y regla de tres; escalas y mapas.

El consenso del análisis realizado por las autoras de este trabajo y por el profesor Juan Díaz Godino ha constituido el marco de referencia (análisis a priori) para la posterior evaluación de los informes de los participantes de las experiencias formativas que se han llevado a cabo en cada caso. Este análisis nos ha permitido concretar debilidades y potenciales conflictos presentes en ambas lecciones, dentro de las que resaltamos principalmente que:

En la lección de Arias y Maza (2015) se observa en relación a la faceta epistémica que no se hace explícita la relación multiplicativa que caracteriza a las situaciones proporcionales, no se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional, ni se establecen conexiones de la proporcionalidad con las fracciones y números racionales. Además, respecto a las dimensiones cognitiva y afectiva, no se promueven diversas estrategias correctas para la resolución de problemas ni se promueve la participación en actividades, tratando actitudes como la perseverancia, responsabilidad, etc. Respecto al aspecto instruccional la presentación de los porcentajes es rutinaria y desconectada de las secciones previas. Tampoco se introduce la regla de tres después de ganar experiencia en métodos más intuitivos, desoyendo las recomendaciones de diversas investigaciones (Fernández, 2001; Fernández y Linares, 2012).

- En cuanto a González et al. (2015), destaca la poca representatividad de situaciones-problema, la ausencia o inexactitud de argumentos y el descuido de los procesos de comunicación, modelización y generalización (en el aspecto epistémico). También el hecho de que no se tienen en cuenta los conocimientos previos requeridos y no se fomenta el uso de diversas estrategias correctas en la resolución de las tareas de proporcionalidad (en lo cognitivo). Y en cuanto a la presentación que hace el autor del texto es incompleta, poco clara o confusa (en lo instruccional).

En ambas lecciones se prioriza el enfoque aritmético de la proporcionalidad, no se inicia el estudio del tema con una aproximación informal-cualitativa previo a su formalización, de manera que no existe una progresión del conocimiento de la estructura aditiva hacia un conocimiento de estructura multiplicativa. Esto puede desencadenar en el uso indiscriminado de la regla de tres y generar un razonamiento proporcional inadecuado (Fernández, 2001; Fernández y Linares, 2012).

Dichas lecciones fueron empleadas en los ciclos de intervención formativa que se han desarrollado como parte del abordaje de los objetivos OE5 y OE6. En dichas intervenciones formativas se busca promover la competencia de análisis de idoneidad didáctica empleando como recurso una lección de proporcionalidad de un libro de texto y como herramienta metodológica la GALT-Proporcionalidad.

Se han implementado dos ciclos de experimentación en España, uno con 30 futuros profesores de secundaria, estudiantes de un Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria

Obligatoria y Bachillerato (ICE), y otro con 59 futuros maestros de primaria, estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria (IICE). Las figuras 1 y 2 muestran las consignas de las tareas que tuvieron que resolver los participantes de ambos estudios.

1. En cada una de las unidades de análisis en que se ha descompuesto el texto sobre proporcionalidad (Arias y Maza, 2015) y para cada una de las facetas:
a) Identificar los componentes y subcomponentes según corresponda, tomando como base el orden en que se presentan en la GALT-Proporcionalidad.
b) ¿En qué grado se cumple cada indicador de idoneidad didáctica en la unidad de análisis? En la columna valoración asignar 0, 1, 2 para expresar el grado de cumplimiento de cada indicador según el siguiente criterio: 0 si no se cumple el indicador; 1 si se cumple parcialmente; 2 si se cumple totalmente. Tenga en cuenta si existe algún tipo de discordancia entre el significado planificado por los autores y el significado de referencia sobre el mismo (conflictos).
c) Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas. Tenga en cuenta la información obtenida anteriormente y los criterios de idoneidad didáctica (GALT-Proporcionalidad).
2. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? Describir los cambios que habría que introducir en el proceso de estudio para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que previamente se han identificado.

Figura 1. Consignas de trabajo práctico en ICE

En Anexo I encontráis parte de una lección de libro de texto de proporcionalidad de 6º curso de educación primaria dividida en 4 configuraciones didácticas (unidades de análisis).
1º. Para cada una de las configuraciones didácticas, se trata de identificar las prácticas, objetos (conceptos, procedimientos, argumentos, proposiciones, lenguajes) y procesos que intervienen, así como los posibles conflictos de tipo epistémico (con el contenido matemático) o cognitivo (con el aprendizaje).
2º. En Anexo II encontráis las tablas (Tablas 1 y 2) con los componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad en la faceta epistémica (el contenido) y cognitiva (el aprendizaje). Para cada una de las configuraciones didácticas debéis completar la columna final de observaciones en la faceta epistémica y cognitiva, teniendo en cuenta las especificaciones de los indicadores. Es decir, las tablas 1 y 2 se completan 3 veces, anotando las observaciones que consideréis oportunas en cada configuración.
3º. En Anexo III se incluyen las tablas (Tablas 3, 4 y 5) con los componentes e indicadores de idoneidad en la faceta afectiva, instruccional (la enseñanza) y ecológica (adaptación de la lección a las directrices curriculares, cómo aparecen reflejados los contenidos y los estándares de aprendizaje). Completad la columna final de observaciones en las tres tablas (afectiva, instruccional y ecológica), teniendo en cuenta las especificaciones de los indicadores correspondientes. Las tablas 3, 4 y 5 sólo se completan de manera global para toda la lección, no para cada unidad como en el caso anterior.
4º. Teniendo en cuenta lo que habéis observado elaborad un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica.
5º. ¿Cómo creéis que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? ¿Qué cambios introduciríais en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que habéis identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto?

Figura 2. Consignas de trabajo práctico en IICE

Respecto al ICE, la experiencia se ha realizado en el marco de un Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad de Matemáticas), en diciembre del 2019, en el curso de posgrado Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria, en el que se contempla el libro de texto como recurso en el aula de matemáticas y su relación con los organizadores curriculares. La intervención formativa tuvo una duración de 2 horas y media de duración de trabajo presencial en el aula. Los participantes tuvieron además dos semanas para elaborar los informes escritos. Durante este tiempo, podían preguntar sus dudas por medio de la plataforma Moodle. La mayor parte de las cuestiones que planteaban los estudiantes del Máster tenían que ver con falta de conocimiento didáctico-matemático sobre proporcionalidad. De manera previa a esta sesión, los participantes habían recibido formación (dos sesiones de dos horas y media de duración) sobre significados y distintos tipos de objetos matemáticos. Se dispone de los informes sobre el análisis de la lección Arias y Maza (2015) producidos por 14 equipos de estudiantes (formados por 2 o 3 estudiantes).

En el IICE participaron estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria, en el marco de la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas de Educación Primaria durante el curso lectivo 2019-2020. La intervención se desarrolló en cuatro sesiones: dos de formación teórica y dos de trabajo práctico colaborativo (de dos horas de duración cada una). La primera sesión formativa se dedicó al papel de los libros de texto en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se introdujeron las nociones de configuración didáctica y de prácticas, objetos y procesos, y su uso para el análisis de la actividad matemática en una lección de libro de texto. En la siguiente clase de formación teórica, se introdujo la noción de idoneidad didáctica, sus facetas, componentes e indicadores. En la primera sesión práctica los estudiantes trabajaron en equipos (siguiendo la metodología habitual de las clases prácticas de esta asignatura) para realizar el análisis de la lección de libro de texto. La segunda sesión práctica se desarrolló de manera virtual, dirigida por la profesora habitual del curso, debido a la suspensión de la actividad docente por el COVID-19.

Dado que los conocimientos matemáticos de los futuros maestros suelen ser inferiores a los de los futuros profesores, consideramos oportuno incluir en este ciclo de experimentación y de manera previa a la aplicación de la GALT-Proporcionalidad para valorar la idoneidad didáctica de la lección, una consigna sobre el análisis didáctico de la lección (ver figura 2), en tanto este primer acercamiento les posibilite realizar mejores análisis. Se dispone del informe de trabajo colaborativo elaborado por 14 equipos sobre el análisis de la lección Gonzalez et al. (2015).

En la confrontación con el análisis a priori consensuado por el equipo investigador, se detecta que la mayoría de las valoraciones realizadas por los participantes son adecuadas al valorar la idoneidad cognitiva-afectiva e instruccional-ecológica de la lección. Sin embargo, las deficiencias epistémicas de la lección no fueron claramente identificadas por los futuros profesores revelando así limitado su conocimiento didáctico-matemático sobre proporcionalidad y falta de evaluación crítica del libro de texto.

Específicamente los futuros profesores de secundaria (ICE) suelen omitir debilidades de contenido matemático que presentan la lección, haciendo referencia a escasos conflictos epistémicos y que no logran precisar adecuadamente. El no haber encontrado en los informes de los estudiantes, argumentos que justifiquen sus valoraciones, nos limitó detectar de manera más precisa las causas de discordancias con las valoraciones del equipo investigador. Los resultados obtenidos coinciden con investigaciones previas que reflejan que los docentes suelen hacer análisis más descriptivos y menos analíticos incluso con el apoyo de una guía (Lloyd y Behm, 2005; Nicol y Crespo, 2006; Schwarz et al., 2008; Yang y Liu, 2019). No obstante, algunos participantes especifican información respecto al tipo de situación, tipos de representaciones, enfoques, que no se abordan en la lección, también describen deficiencias o limitaciones de la lección de modo pertinente y fueron capaces de planear aspectos relevantes en la gestión de uso del libro.

En la intervención con futuros maestros de primaria (IICE), los participantes realizan un análisis incompleto de las prácticas, objetos y procesos matemáticos. Fundamentalmente, no identifican proposiciones o argumentos en la lección, lo que les limita para especificar tipos de conflictos epistémicos y cognitivos presentes en la lección. También aquí los participantes de la experiencia han demostrado tener dificultad en cuanto a la justificación de las valoraciones de algunos de los indicadores, de hecho, no suelen incluir en sus observaciones argumentos o son poco específicos lo que dificulta la interpretación de sus evaluaciones.

6. Reflexiones Finales

El interés de este trabajo reside en elaborar y dotar a los futuros profesores de una herramienta para analizar sistemáticamente una lección concreta de libro de texto, en este caso de proporcionalidad, y valorar su idoneidad didáctica por medio de la aplicación de indicadores resultado de un consenso en la comunidad de investigación en educación matemática. Se trata de permitir que los futuros profesores puedan reflexionar y adquirir los conocimientos y competencias necesarias, tanto en el análisis de lecciones de libros de texto, como en la gestión crítica de éstas. La valoración de la pertinencia de una lección de un libro de texto, no debe contemplar sólo los aspectos que refieren al contenido matemático, sino que se debe evaluar las demás facetas (cognitiva, afectiva, instruccional, ecológica) involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

No se descarta que las dificultades que presentan algunos participantes al analizar la lección propuesta, se deban a un conocimiento didáctico-matemático deficiente en relación con la proporcionalidad, que impida a los futuros maestros interpretar o distinguir aspectos realmente conflictivos (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Izsák y Jacobson, 2017). Así se hace necesario profundizar en los conocimientos que requieren los futuros docentes para analizar la idoneidad didáctica de recursos educativos, como pueden ser los libros de texto, en un proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido concreto. También puede deberse a la falta de comprensión de algunos de los criterios para el análisis de los materiales. Este hecho se refleja no sólo en la evaluación y comparación con el análisis a priori de las valoraciones otorgadas, sino también porque algunos futuros profesores de secundaria lo manifiestan explícitamente indicando que algunos de los indicadores pueden ser confusos o ambiguos, señalando la falta de familiaridad con la terminología propia de la educación matemática. Estos resultados coinciden con investigaciones como las de (Beyer y Davis, 2012; Braga y Belver, 2016; Schwarz et al., 2008) donde los docentes tuvieron dificultades en el análisis al interpretar criterios y muchos catalogaron el trabajo como demasiado detallado o largo.

En este sentido, una posible limitación del estudio, es el hecho de que los docentes no han tenido la oportunidad de familiarizarse lo suficiente con las facetas, componentes y criterios de la teoría de Idoneidad Didáctica y la GALT-Proporcionalidad. Creemos que al ser el primer acercamiento al uso de esta herramienta es normal que surjan dificultades como las señaladas.

El contar con más tiempo puede mejorar los análisis realizados por los docentes al conseguir familiarizarse con la Idoneidad

Didáctica y disponer de mayores oportunidades de aplicación del instrumento. Consideramos que la optimización de la GALT-Matemáticas, contemplando los resultados obtenidos en esta intervención puede tener implicaciones positivas y mejores efectos en futuras intervenciones. Además, sería fundamental contar con espacios para compartir con los participantes los resultados aquí obtenidos como oportunidades de aprendizaje y la relevancia de ahondar en conocimientos didáctico-matemáticos relacionados con la proporcionalidad.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España). Se agradece por el apoyo económico de una beca en el exterior otorgada a la primera autora por la Universidad de Costa Rica.

Referencias

Arias, J. y Maza, S. (2015). *Matemáticas, 1º ESO*. España, Código Bruño.

Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad., *6*(1), 1-29.

Ball, D. L., y Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is: or might be: the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher, 25*(9), 6 –8, 14.

Ball, D. L., y Feiman-Nemser, S. (1988). Using textbooks and teachers' guides: A dilemma for beginning teachers and teacher educators. Curriculum Inquiry, 18(4), 401 – 423.

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. (2019). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. Cambridge Journal of Education, 1-20.

Beyer, C. J. y Davis, E. A. (2012). Learning to critique and adapt science curriculum materials: Examining the development of preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge. Science Education, 96(1), 130-157.

Braga, G. y Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. Revista Complutense de Educación, 27(1), 199-218.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Brown, M. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17–36). New York: Routledge.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2018). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema, 33* (63), 389-410.

Castillo, M. J. (2019). *Elaboración de una guía para el análisis de lecciones de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica.* Trabajo de Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa* (aceptado).

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres: Routledge.

Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(5), 331-353.

Drake, C., y Sherin, M. G. (2009). Developing curriculum vision and trust: Changes in teachers' curriculum strategies. In J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 321–337). New York: Routledge.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. ZDM, 45(5), 765-777.

Fan, L., Zhu, Y., y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. ZDM, 45(5), 633-646.

Fernández Lajusticia, A. (2001). Precursores del racionamiento proporcional: un estudio con alumnos de primaria. Tesis doctoral. Universitat de València. Recuperado de http://roderic.uv.es/handle/10550/38017

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 67-80.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012) Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), pp. 129-142.

Godino, J. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31* (57), 90-113.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 34, 167-200.

Godino, J., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa,* *7*(2), 331-354.

González, Y., Garín, M., Nieto, M., Ramírez, R., Bernabeu, J., Pérez, M., Pérez, B., Morales, F., Vidal, J. M., Hidalgo, V. (2015). Moratalla. "6 Matemáticas. 6 Primaria. Trimestral. Savia," Ediciones SM.

Grossman, P., y Thompson, C. (2008). Learning from curriculum materials: Scaffolds for new teachers? *Teaching and Teacher Education*, 24(8), 2014 – 2026.

Izsák, A., y Jacobson, E. (2017). Preservice teachers' learning about relationships that are and are not proportional: A knowledge-in-pieces account. Journal for Research in Mathematics Education, 48(3), 300–339.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lin, P-J. (2018). The Development of Students Mathematical Argumentation in a Primary Classroom. *Educação y Realidade, 43* (3), p. 1171-1192.

Lloyd, G. M., y Behm, S. L. (2005). Preservice elementary teachers' analysis of mathematics instructional materials. Action in Teacher Education, 26(4), 48 – 62.

Martínez, A. (2015). Examining students' proportional reasoning strategy levels as evidence of the impact of an integrated LEGO robotics and mathematics learning experience. *Journal of Technology Education, 26*(2), 46-73.

MECD (2014a). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid, España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD).

MECD (2014b). *Real Decreto1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid, España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD).

Misailidou, C y Williams, J. (2003) Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour, 22*(3), 335-368.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24*(1), 133-157.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en educación secundaria. *Revista de Educación*, (358), 471-496.

Nicol, C. C., y Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 331 – 355.

Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 59-81.

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal, 100*(4), 331–350.

Schwarz, C., Gunckel, K., Smith, E., Covitt, B., Bae, M., Enfield, M., y Tsurusaki, B. (2008). Helping elementary pre-service teachers learn to use science curriculum materials for effective science teaching. Science Education, 92(2), 345 – 377.

Shawer, S. F. (2017). Teacher-driven curriculum development at the classroom level: Implications for curriculum, pedagogy and teacher training. Teaching and Teacher Education, 63, 296–313.

Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 183-199.

Thompson, D. (2014). Reasoning-and-proving in the written curriculum: Lessons and implications for teachers, curriculum designers, and researchers. *International Journal of Educational Research, 64*, 141–148.

Van Dooren, W., De Bock, D. Gillard, E. y Verschaffel, L. (2009). Add? or multiply? A study on the development of primary school students proportional reasoning skills. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 281-288). Thessalonika, Grecia: PME.

Weiland, T., Orrill, C. H., Nagar, G. G., Brown, R. E. y Burke, J. (2020). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/wilhelmi.pdf

Yang, K., y Liu, X. (2019). Exploratory study on Taiwanese secondary teachers' critiques of mathematics textbooks. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(1), em1655. https://doi.org/10.29333/ejmste/99515

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DEL CURRÍCULO CHILENO EN EDUCACIÓN BÁSICA ENTORNO DIVISIÓN COMO ISOMORFISMO DE MEDIDA

ANALYSIS OF THE CHILEAN CURRICULUM IN BASIC EDUCATION ENVIRONMENT DIVISION AS ISOMORPHISM OF MEASURE

YANET RIVERAS LEÓN, MAXIMINA MÁRQUEZ TORRES
yriverasleon@gmail.com, maximina.marquez@ulagos.cl
UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

RESUMEN

El presente trabajo pretende analizar la perspectiva entorno a la división que promueve el currículo chileno y justificar la importancia de realizar un análisis sobre los temas de este concepto en enseñanza básica. Debido a la relevancia que adquiere este material para el profesorado al momento de realizar sus clases, en esta ocasión centraremos nuestro trabajo en 5° básico. Para realizar este análisis nos hemos apoyado de dos marcos teóricos, por un lado, tenemos los problemas de estructura multiplicativa (isomorfismo de medidas) propuestos por Vergnaud (1997) y verificar cuales son los significados pretendidos y holístico de referencia propuestos en el Enfoque Ontosemiótico. En esta ocasión, daremos cuenta del análisis presentado por el Enfoque Ontosemiótico.

Palabras clave: *currículo chileno, división, isomorfismo de medidas, enfoque ontosemiótico*

Abstract

The current work to analyze the perspective around the division promoted by the Chilean curriculum and justify the importance of carrying out an analysis on the topics of this concept in basic education. Due to the relevance that this material acquires for teachers at the time of carrying out their classes. This time we will focus our work on 5th grade. To carry out this analysis we have relied on two theoretical frameworks, on the one hand, we have the multiplicative structure problems (measurement isomorphism) proposed by Vergnaud (1997) and verify what are the intended and holistic meanings of references proposed in the Ontosemiotic Approach. On this occasion, we will give an account of the analysis presented by the Ontosemiotic Approach.
Keywords: *chilean curriculum, division, measurement isomorphism, ontosemiotic approach.*

1. Antecedentes

1.1. Introducción

En la primera parte hacemos referencia a la revisión histórico-documental de la noción de *división*, para ello hicimos un recorrido desde la época de los babilónicos, egipcios hasta la actualidad, posteriormente analizamos algunos estudios relacionados con las dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la *división*.

1.2. Estudio Histórico – documental de la noción de división

La historia nos revela a través de Ríbnikov (1974), que los problemas matemáticos nacen a raíz de la necesidad que tenía el hombre de expresar cantidades, contar, calcular, también aparecen los conceptos matemáticos, entre otros. Estos problemas matemáticos se cree que vienen desde antes de Cristo. Si bien no sabe con exactitud donde nacen los números, Bell (1985) añade que datos históricos revelan que tienen su origen en las culturas de Egipto y Mesopotamia en actividades relacionadas con la astronomía y la agricultura, siendo estas civilizaciones las que sentaron las bases para el trabajo de otros matemáticos.

1.3. Desde la época más remota a la actualidad

> En relación a los conocimientos matemáticos que poseían los egipcios, Ribnikov (1974) menciona que se encuentran principalmente en papiros, entre ellos está el papiro de Rhind, en él se obsrvan distintos problemas en los que emplearon diferentes operaciones aritméticas, entre ellos se encontraban cálculos de *divisiones* proporcionales. Los egipcios desarrollaron innumerables cálculos con números enteros y fracciones, siendo característico del sistema egipcio que los procedimientos utilizados se reduzcan a sumas, y la duplicación de las cantidades para el desarrollo de problemas relacionados con la multiplicación y la *división*. En el procedimiento se aplicaba primero la du-

> plicación de los datos numéricos y, posteriormente, *división* sucesiva por la mitad, siendo esta operación la más compleja.
>
> En lo que respecta de los babilonios, era más fácil para ellos realizar cálculos de multiplicación que de *división,* considerando esta última muy compleja por lo que se conoce muy poco sobre esta operación.

En el caso de los griegos Bell (1985), nos da a conocer que se ocupaban del estudio de las propiedades de los números, siendo Euclides el que demostró los teoremas fundamentales sobre la divisibilidad aritmética el que más tarde es deducido por Gauss, dicho método señala que de un número entero positivo se puede descomponer en producto de dos números primos menores que él, correspondiente al teorema fundamental de la aritmética, a pesar de que Euclides no fue el que descubrió los teoremas, fue el primero que los dio a conocer a través de demostraciones en los Elementos, siendo la aritmética fundamental ya que brinda las bases para las demás ciencias. En tanto Boyer (1976), nos señala que el libro VII de Los elementos de Euclides, comienza con dos proposiciones que constituyen la regla de la teoría de números, la que actualmente se conoce como el "algoritmo de Euclides", esta regla se aplicaba para el cálculo del máximo común divisor de dos números dados, la que consiste en un esquema que sugiere una aplicación inversa y repetida del axioma de Eudoxo, la cual menciona que dado dos números distintos se resta el menor a del mayor b repetidamente a este resto r_1 más pequeño que el menor, a continuación se resta repetidamente a este resto r_1 de a hasta obtener un resto $r_2 < r_1$; luego se resta repetidamente r_2 de r_1 y así sucesivamente. Al final este proceso conducirá a un resto r_n que medirá a $r_n - 1$, posteriormente a todos los restos anteriores, así como a a y a b; este número r_n será el máximo común divisor de a y de b.

En los pueblos orientales y semíticos, la cultura de la Antigua China se introdujeron las fracciones simples y las operaciones aritméticas, en la *división* de fracciones se busca un denominador común, los problemas que se desarrollaban estaban relacionados con situaciones concretas los que se resolvían utilizando mayormente la regla de tres y las divisiones proporcionales, en el caso de las actividades donde era necesario realizar una división eran reemplazadas por proporciones simples. En lo que respecta a la matemática utilizada por la India tenía mucha similitud con la que usaban los chinos, en la cual predominaron los procedimientos de cálculo – algorítmico, la resolución de problemas consiste en realizar sucesivamente las operaciones en orden inverso (Ríbnikov, 1974). En lo que respecta a los hindúes, Boyer (1985), se refiere a que las operaciones aritméticas, suma y multiplicación eran muy similares a las nuestras, en tanto en el caso de la *división* era considerada una operación larga conociéndose dos formas de resolver, uno de los métodos utilizados era muy parecido al que utilizamos en la actualidad y la otra forma de resolver era ir eliminando las restas e ir escribiendo las diferencias.

En relación a los musulmanes desarrollaron el álgebra y la aritmética tomado de la cultura india con el objetivo de prepararse para el renacimiento europeo, siendo estos quienes llevaron a Europa estas ciencias, otro de los aportes está relacionados con la trigonometría, aunque esta área se conoce como una parte separada de las matemáticas. Las culturas que hicieron sus mayores contribuciones al cálculo de la *división* fueron los chinos profundizando mayormente en la búsqueda del algoritmo de las fracciones y proporciones simples y compuestas por medio de la utilización de la regla de tres.

Según lo que nos señala D´Amore (2005), los algoritmos que se enseñan en la actualidad son los derivados de los árabes con procedencia desde la India los que llegaron a Europa en los siglos XIII, XIV y XV, los problemas que se desarrollaban estaban relacionados con la vida cotidiana y en ocasiones era compleja su resolución por lo que tenían que recurrir a material concreto.

En cuanto al algoritmo de la *división* Maza (1991), nos señala que el hombre a lo largo de la Historia ha construido distintas maneras de cómo resolver problemas relacionados con multiplicación y *división*, siendo las distintas culturas antiguas las que se han dedicado a la búsqueda de algoritmos que resuelvan las diferentes problemáticas.

Durante los siglos XVII y XVIII Descartes relaciona el álgebra literal con las curvas geométricas, estableciendo el isomorfismo entre los números reales y el campo de los segmentos de recta, sin embargo, se presenta dificultad con la multiplicación y la *división* de segmentos, introduciendo el segmento de unidad y la construcción del cuarto segmento proporcional. Además, el cálculo aritmético fue enriquecido con la utilización de logaritmos y las tablas correspondientes, en el desarrollo del cálculo se reveló el concepto de número negativo y la situación de desigualdad de las fracciones decimales comparativas con las ordinarias (Ribnikov, 1974).

Si bien en los siglos XIX y XX no se presentan grandes avances en la aritmética o búsqueda de algoritmos de las operaciones, se consideraron elementos de estás para los avances en las otras ramas relacionadas con las matemáticas y las ciencias en general.

1.4. Dificultades en la enseñanza de la división

En este apartado nos referimos a las dificultades que se presentan en relación a los procesos de enseñanza de la división, la cuál es abordada en educación primaria. Debido a las dificultades que se presentan en los diferentes ámbitos es que se han realizado varias investigaciones que van desde cómo se introduce el algoritmo de la *división* al desarrollo de esta, además pueden estar relacionadas con los procesos de enseñanza y el tipo de material que se les proporciona a los profesores para introducir la noción de la misma. (Flores y Piñeiro, 2016).

En relación a las dificultades que presentan los estudiantes estas pueden estar relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los algoritmos aritméticos, los que han sido motivo de discusión en cuanto al proceso de cómo se enfoca el concepto y cuáles son los procedimientos que se utilizan para llevar a cabo la enseñanza de los algoritmos. En cuanto a la búsqueda del algoritmo en la resolución de problemas de estructura aditivas y multiplicativas, se plantearon situaciones en las que los estudiantes debían aplicar una multiplicación o *división* de reparto y agrupamiento, utilizando el conteo de elementos, las actividades a realizar eran cercanas a los niños con acciones vividas anteriormente, además el material utilizado era el que ellos elegían. (De Castro y Escorial, 2007). Si bien los estudiantes muchas veces eligen el material con el cuál se trabaja la *división*, Saíz (1994), buscaba visualizar cuáles pueden ser las dificultades que presentan los niños al resolver problemas de *división* en los niveles de 5° y 6° grado en un establecimiento educacional de Argentina, el objetivo era aportar a los maestros estrategias que le permitieran solucionar las dificultades presentadas por los estudiantes en la resolución de problemas relacionados con la *división*. Los resultados evidenciaron que los estudiantes al enfrentarse a este tipo de problemas no sabían cuál de las operaciones realizar, una multiplicación o *división*, además las explicaciones de los profesores eran poco claras las que dificultaban aún más la situación, otro de los errores que presentaban no sabían interpretar correctamente las divisiones con resto.

1.5. Estudios con estudiantes sobre los problemas de División

Entre las investigaciones que se han realizado en relación a los problemas de *división*, se encuentra un estudio que se realizó con estudiantes de 3° grado de una escuela pública de Perú, en ella se buscaba que los estudiantes construyeran el concepto de *división*, se les presentaron actividades de reparto, contenido del cual los estudiantes no poseían conocimientos por ser una operación que se trabaja en 4° grado, pero si tenían conocimiento de la adición, sustracción y multiplicación, para ello se realizaron sesiones en las que se abordó desde la noción de *división* y divisibilidad con números naturales, incluyendo actividades individuales y grupales. Los resultados muestran que el concepto de reparto equitativo es intuitivo para los estudiantes lo que resultó muy natural realizarlo, pues es una actividad que realizan a diario, de esta manera se logra que comprendan el concepto y no se genere un aprendizaje de memoria lo que sería una dificultad en un futuro (Ordoñez, 2019).

Con el fin de buscar el porqué de los bajos resultados en las pruebas estandarizadas de los estudiantes mexicanos en especial en la prueba PISA, se realiza un estudio el que pretende encontrar lo que sucede cuando los estudiantes de sexto de primaria y tercero de secundaria, se enfrentan a problemas de estructuras multiplicativas, problemas de isomorfismo de medidas del tipo *división-reparto*. Se cree que algunas dificultades están relacionadas con el tipo de lenguaje, la notación y dominio de conceptos involucrados. Se aplicó un cuestionario a estudiantes de cinco escuelas públicas del estado de Veracruz, de los cuales a la mitad de los alumnos se les permitió el uso de la calculadora y otra mitad sin uso de ella; sin embargo los resultados obtenidos en primaria fueron en su mayoría incorrectos, en tanto en secundaria los resultados fueron mejores en relación a los de primaria, además se compararon los resultados obtenidos por las escuelas rurales y urbanas siendo estos similares en ambos casos no demostrando mejoras significativas de los unos con los otros, a pesar que se esperaba tuvieran diferencias significativas (Bustamante y Vaca, 2014).

Aravena y Morales (2019), realizan un estudio con alumnos de 4° básico de una escuela particular subvencionada de una comuna de Santiago, cuyo objetivo era develar, en los argumentos de los estudiantes de 9 años, elementos que permiten caracterizar el proceso de construcción del algoritmo de la *división* en el sistema de los números naturales, esta experiencia se desarrolla debido a comentarios realizados por docentes de matemáticas en el que explicitaban lo difícil que les resultaba enseñar este contenido y lo complejo que es para los alumnos la comprensión del mismo, en ella destacan que su principal foco de atención fue visualizar como los estudiantes resolvían problemas de *división* donde tenían que aplicar el reparto, antes de comenzar con la búsqueda del algoritmo se realizaron actividades previas de descomposición de números apoyados con material concreto (bloques multibase), posteriormente se les propusieron diversos problemas en los que los estudiantes debían resolver de reparto e interpretación del resto, al realizar este tipo de actividades los alumnos no tuvieron dificultades, aunque cuando se les presentó un problema de agrupamiento no la reconocen como una *división*. La investigación concluye que para los alumnos es necesario construir o utilizar alguna estrategia que les permita encontrar una respuesta a la tarea solicitada, sin embargo, esta pierde sustento cuando se dan cuenta que necesitan de otra operación para resolver correctamente el algoritmo presentando dificultades en las tablas de multiplicar, lo que no provoca un problema al realizar el cálculo, ya que son capaces de recurrir a otras estrategias para obtener un resultado.

2. Contexto de la problemática

Para abordar este trabajo nos apoyamos en La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1997), específicamente los problemas de Isomorfismo de medida de *división-medida* y *división-partitiva*, además complementaremos con los significados pretendidos y significados holístico de referencia propuestos en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática.

En lo que respecta a la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1997), nos permitirá centrar nuestra investigación en las actividades cognitivas que son desarrolladas por los estudiantes y las cuáles están presentes en los libros de texto y programas de estudio. Por ser una Teoría Neo piagetana, afirma que los campos conceptuales son un conjunto de problemas y situaciones, la cual requiere de conceptos y procedimientos y representaciones diferentes pero relacionadas entre sí. Vergnaud distingue tres grandes relaciones multiplicativas (relaciones que comparten una multiplicación o una división): isomorfismo de medida, un solo espacio de medida y producto de medida.

En relación al Enfoque Onto-semiótico, Godino, Batanero y Font (2007), realizan un recorrido por lo que ha sido la construcción de este enfoque y cómo esta herramienta ha sido fundamental en el análisis de la investigación en didáctica de la matemática, la que ha permitido visualizarla desde distintas aristas.

Font y Godino (2006), señalan que una de las dificultades es como diseñar programas relacionados con la formación de profesores, la falta del conocimiento didáctico el que se refleja principalmente en el uso de los libros de textos, ya que estos instrumentos constituyen un elemento fundamental en el desarrollo de las actividades en el aula se ha considerado una "ontología" más amplia la cual consta de 6 elementos, *1) lenguaje, 2) situaciones – problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas, 5) proposiciones, teoremas, propiedades,* *entre otros y 6) argumentación*, ya que la que consideran algunos países en sus currículo, era considerada muy simple para realizar el análisis de los objetos matemáticos presentes en los textos, por estar formada por solo dos elementos, los conceptos y procedimientos, los que al enlazarse forman las configuraciones epistémicas. El constructo de la configuración epistémica se puede utilizar en el análisis matemático de cualquier tipo de libro de texto y época; siendo útiles en el análisis global como en una unidad didáctica.

2.1. Problema de investigación

Luego de revisar la literatura observamos que existen distintos obstáculos para la implementación de actividades relacionadas con los problemas de estructuras multiplicativas, las que pueden ser epistemológicas, ontológicas y/o didácticas. Si consideramos estos obstáculos que existen en el aprendizaje de las estructuras multiplicativas (*división – medida y división – partitiva*), podemos ver que los estudiantes presentan dificultades en la compresión de la *división*, ya que según la literatura nos ha señalado que desde la antigüedad la *división* fue, ha sido y es considerada una de las operaciones más compleja, ya que como menciona la historia desde la antigua Grecia, la cultura China, la egipcia, entre otras, los matemáticos pasaban mucho tiempo queriendo descifrar y resolver problemas donde estaba presente la *división*. Las dificultades han estado siempre presentes en el desarrollo de esta operación lo que queda demostrado que hasta hoy en día los estudiantes presentan mayores dificultades en el desarrollo de este algoritmo, siendo la más compleja de todas, en el caso de los profesores también presentan dificultades en la enseñanza de esta operación, es por esta razón que nos interesamos en analizar cómo se desarrolla en los programas y libros de textos chilenos.

En relación al problema planteado nos han surgido muchas interrogantes relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la *división*, tal como la siguiente:

¿Cuáles son los significados de la noción de división que considera el currículo chileno?

2.2. Objetivo

Para responder la pregunta antes expuesta, nos propusimos el siguiente objetivo: Identificar los significados pretendidos por el currículo chileno a la noción de división.

2.3. Metodología

Este trabajo se trata de un estudio cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), ya que las preguntas e hipótesis se pueden encontrar presentes en todo momento del trabajo, es decir, antes, durante y después de recoger los datos, las cuales a medida que se avanza con el trabajo se pueden ir clasificando de acuerdo a la importancia y perfeccionando para posteriormente responderlas.

Pues estamos interesadas en evaluar los significados pretendidos y holísticos de referencia propuestos en el Enfoque Onto-semiótico presentes en los libros de texto y programas de estudio.

Para realizar este trabajo hemos hecho una revisión de los programas de estudio y libros de texto de matemática propuestos por el Ministerio de Educación de Chile desde 1° a 6° básico, en relación a la noción de *división*, sin embargo, para este documento informaremos de los resultados del libro de texto de 5° básico (Ho Kheong, Kee Soon y Ramakrishnan, 2017).

3. Análisis de la noción de división en 5° básico, según el EOS

Como hemos mencionado anteriormente solo nos enfocaremos en el curso de 5° básico, cuyas edades fluctúan entre los 10 y 11 años. En este nivel analizaremos el currículo (libro de texto y programa de estudio), de tal manera de evidenciar cómo enfoca la noción de *división*.

Por otra parte, durante la revisión del libro de texto de 5° básico hemos podido visualizar que las actividades están centradas principalmente en la búsqueda del algoritmo por sobre la resolución de problemas, lo que se puede evidenciar en la siguiente tabla:

Tabla 1. *Actividades presentadas en los libros de texto en relación a la división en 5° básico.*

RESTA REPETIDA	AGRUPAR ELEMENTOS	REPARTIR EQUITATIVAMENTE	ALGORITMO DE LA DIVISIÓN		INTERPRETACIÓN DEL RESTO	
			EJERCICIO	PROBLEMA	EJERCICIO	PROBLEMA
3	0	0	69	13	3	8

3.1. Análisis epistémico del programa de estudio de 5° básico

El programa de estudio de 5° básico está dividido en cuatro unidades y cinco ejes temáticos cada uno de ellos relacionados con las unidades, en el caso de la *división* se encuentra presente en la unidad n°1 en el eje de números, la cual está compuesta por ocho objetivos de aprendizajes, la noción de *división* se encuentra presente en los OA_2, OA_4, OA_5 y OA_6. Además, cabe señalar que cada uno de los objetivos de aprendizaje están relacionados con sus respectivos indicadores de evaluación los que están en concordancia con las actividades presentes en los libros de texto (Ejemplo: Figura 1).

OA_2: Aplicar estrategias de cálculo mental para la multiplicación:

- Anexar ceros cuando se multiplica por un múltiplo de 10.
- Doblar y dividir por 2 en forma repetida.

OA_4: Demostrar que comprende la división con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito:

- Interpretando el resto.
- Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen divisiones.

OA_5: Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones con expresiones numéricas, aplicando las reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y división por sobre la adición y sustracción cuando corresponda.

- Resuelve sumas y/o restas de multiplicaciones y/o divisiones.

OA_6: Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren las 4 operaciones y combinaciones de ella:

- Que incluyan situaciones con dinero.

OA_4

Demostrar que comprende la división con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito: **› interpretando el resto** **› resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen divisiones**	› Modelan la división como el proceso de reparto equitativo, usando bloques de base diez, y registran los resultados de manera simbólica. › Explican el resto de una división en términos del contexto. › Ignoran el resto de divisiones en el contexto de situaciones. Por ejemplo: determinan que 5 equipos de 4 personas cada uno se pueden formar con 22 personas. › Redondean cocientes. › Expresan restos como fracciones. › Expresan restos como decimales. › Resuelven un problema no rutinario de división en contexto, usando el algoritmo y registrando el proceso.

Figura 1. Ejemplo de objetivo de aprendizaje e indicadores de evaluación, Unidad 1

Fuente: Mineduc, (2013, p. 55)

Como primer elemento de las configuraciones epistémicas están relacionadas con las *situaciones/problemas* presentes en los programas de estudio, se espera que los estudiantes al desarrollar las actividades sean capaces de argumentar y comunicar, además de representar de manera gráfica la información de tal manera que puedan comprender más fácil los problemas. Las actividades a desarrollar que se presentan son contextualizadas y se pretende que se conecten con otras asignaturas de tal manera que los estudiantes logren relacionar la información de forma transversal. En cuanto a los *elementos/lingüísticos* presentes, se espera que expresen información de manera verbal y simbólica utilizando algunos conceptos claves, tales como: producto, cociente, resto, entre otros.

3.2. Configuración epistémica para los libros de texto

En relación al libro de texto sugerido por el Ministerio de Educación de Chile para Quinto básico, presenta la *división* en la unidad 1 denominada, *Números naturales, operaciones y patrones*, la cual está dividida en cuatro lecciones, con respecto a la *división* se encuentra en la lección dos de la *multiplicación y división* y en la lección tres de *estrategias de cálculo y problemas*.

Configuración epistémica

Para iniciar el análisis de la configuración epistémica presente en el libro de texto, tomaremos el primer elemento que se refiere a las *situaciones/problemas*, en relación a ello hemos encontrado cuatro elementos: 1) completa la resolución de un problema y lo comprueba, 2) problemas contextualizados de *división* interpretando el resto, 3) ejercicios de *división* mediante reagrupación de centenas, decenas y unidades, 4) la multiplicación como método de comprobar el resultado de la *división*. En relación a los *elementos lingüísticos* hemos encontrado *situaciones/problemas* de tipo verbal, gráfico de tipo tabular, pictórico en menor medida, además de simbólicos. De la misma forma las *representaciones* se expresan con material concreto, pictórico y simbólico. En cuanto a los *conceptos/definiciones* hemos encontrado conceptos previos y emergentes; previos: mitad, mitad de números pares, propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, estimar cocientes, *división*, entre otros. De igual manera en los conceptos emergentes: dividir reagrupando centenas, decenas y unidades, resolver problemas interpretando el resto de una *división* (siendo este en el único libro de básica que presenta este tipo de problemas). Además de propiedades relacionadas con reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y *división* por sobre la adición y sustracción cuando corresponda.

En quinto básico relaciona la multiplicación con la *división* para encontrar el producto, por ejemplo: "*El producto de 12 × 5 es equivalente a 6 × 10*", es decir, "*Puedes doblar y dividir por 2 en forma sucesiva*", tal como se muestra en la figura 2.

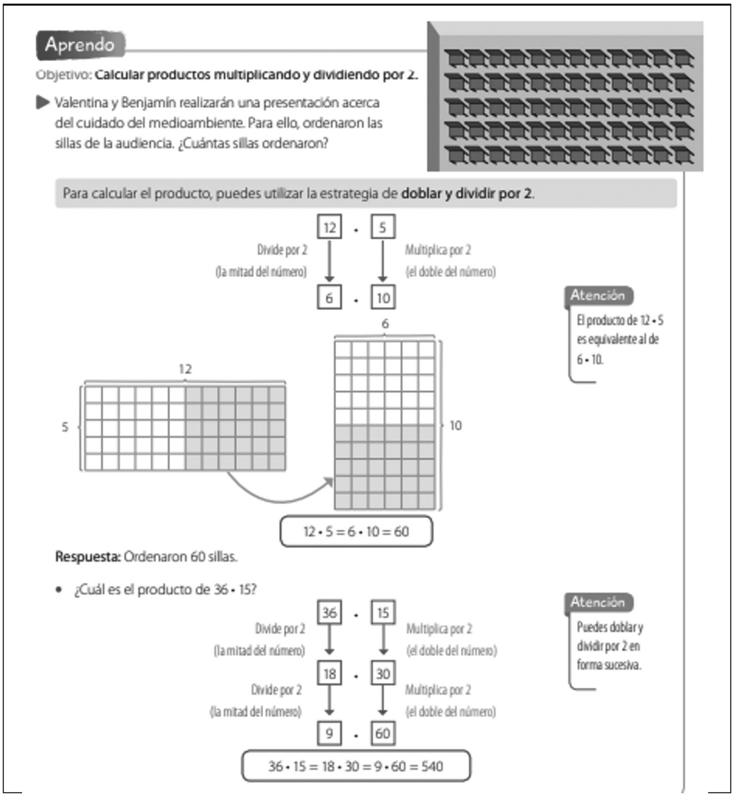


Figura 2. Ejemplo de problema
Fuente: Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan (2017, p. 58)

En relación al segundo tipo de problemas el estudiante además de resolver un problema cercano a nuestra realidad debe interpretar qué sucede con el resto, tal como se muestra en la figura 3.

b. Una agencia de turismo espera a 135 turistas para la próxima semana. Cada uno de los vehículos de la agencia puede llevar a 7 pasajeros. ¿Cuántos vehículos se necesitarán para transportar a todos los turistas?

Figura 3. Ejemplo de problema
Fuente: Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan (2017, p. 73)

En el tercer tipo de *situaciones/problemas* hemos encontrado actividades en las cuales para obtener la solución se solicita que aplique la descomposición en centenas, decenas y unidades, tal como se muestra en la figura 4.

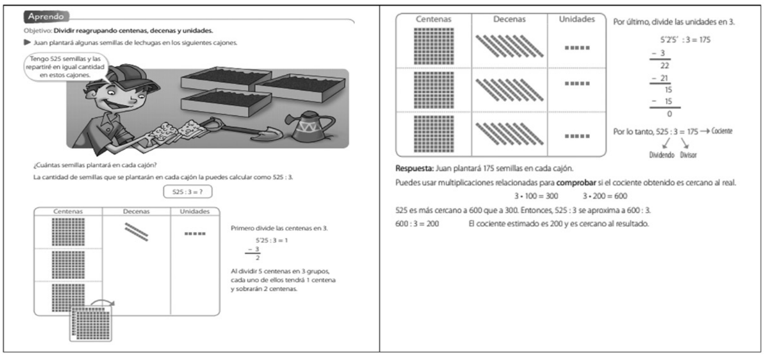


Figura 4. Ejemplo de problema
Fuente: Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan (2017, pp. 67-69)

Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La tabla 2 resume el tipo de planteamientos de las tareas que se espera que desarrollen los estudiantes en relación a los distintos problemas que se encuentran presentes en los libros de texto.

Tabla 2. *Representaciones previas y emergentes de los problemas de 5° básico* (Fuente: Elaboración propia)

Representación para la noción de división					
Emergentes / Previos		División			
		Verbal	Concreta	Gráfica	Simbólica
División	Verbal				
	Concreta				
	Gráfica				
	Simbólica				

En cuanto al tipo de problemas podemos observar que encontramos cuatro clases de problemas, en el primer caso tenemos una *situación/problema* en que se expresa de manera verbal y se espera que se responda de manera verbal. Por ejemplo:

10 Resuelve los siguientes problemas.

a. Mariana, Benjamín, Carolina y Daniel estimaron el cociente de 468 : 5. Estas son sus respuestas:

Nombre	Respuesta
Mariana	2500
Benjamín	450
Carolina	90
Daniel	9

Explícale a un compañero o compañera cuál de las respuestas es más cercana al cociente real.

Figura 5. Ejemplo de problema
Fuente: Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan (2017, p.73)

El segundo tipo tiene relación con verbal simbólica, la *situación/problema* se expresa de manera verbal, pero se pide al estudiante que represente la solución de manera simbólica, por ejemplo:

6 Analiza y responde. Luego, justifica con ejemplos.

a. Si un número es dividido por 2, ¿cuáles son los posibles restos?

b. Si un número es dividido por 3, ¿cuáles son los posibles restos?

Figura 6. Ejemplo de problema
Fuente: Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan (2017, p. 72)

En cuanto a la tercera clase de *situaciones/problemas* hemos encontrado cuando la actividad es presentada de manera gráfica y se espera que la solución se exprese de manera simbólica, tal como lo muestra la figura 7.

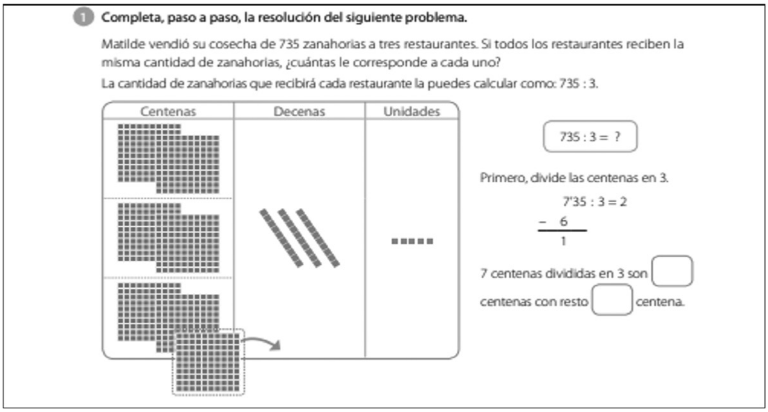


Figura 7. Ejemplo de problema
Fuente: Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan (2017, pp. 69)

En la cuarta clasificación hemos visualizado las *situaciones/problemas* en las que la actividad se expresa de manera simbólica y se espera que la solución también se represente de manera simbólica. Por ejemplo:

Figura 8. Ejemplo de problema
Fuente: Ho Khong, Gan Kee y Ramakrishnan (2017, pp. 69-70)

3.3. Discusión y propuesta

En cuanto a los significados holísticos de referencia presentes en la dupla curricular (programa de estudio y libro de texto) en 5° básico hemos visualizado que la mayoría de las actividades presentes están relacionadas con la búsqueda del algoritmo de la *división*, transitando de lo verbal a lo simbólico, dejando de lado la transición de lo verbal a lo gráfico y de lo concreto a lo gráfico, y de lo gráfico a lo simbólico lo que en un futuro puede ocasionar dificultades en la comprensión de problemas cuando se requiera del cambio de registro. Además de generar problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, pues los libros de texto son considerados una herramienta fundamental para el profesorado al momento de realizar sus clases.

En cuanto a los tipos de problemas identificados en el libro de texto hemos encontrado mayormente la búsqueda del algoritmo de la *división* por sobre la resolución de problemas, situación que también genera dificultades en los estudiantes, ya que al priorizar este tipo de actividades generando un aprendizaje memorístico y poco contextualizado.

Otra de las limitaciones que nos encontramos durante la investigación es que luego de revisar la literatura relacionada con las dificultades en relación a los problemas de isomorfismo de medida (*división-partitiva* y *división-medida*) encontramos que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades en la interpretación del resto en la división. A pesar de que es en el único libro del Ministerio de Educación (de 3° a 6°) que hace referencia a problemas de este tipo, son muy pocos los encontrados. Sería interesante realizar un análisis de los libros de texto utilizados por los establecimientos privados para realizar una comparación con los resultados obtenidos en este estudio.

Por otra parte, consideramos poder extender este análisis a los cuadernos de ejercicios que entrega el Ministerio de Educación como complemento de los libros de texto.

Agradecimientos

Este trabajo se lleva a cabo en el marco del Proyecto Regular CR22/18 "Caracterización del conocimiento para la enseñanza de futuros profesores sobre la división medida", bajo la tutela de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado de la Universidad de Los Lagos.

Referencias

Aravena, A. y Morales, A. (2019). Construcción del algoritmo de la división en estudiantes de cuarto año básico de una escuela chilena. *PNA*, *13*(3), 147-171.

Bell, E. T. (1969). *Historia de las Matemáticas*. Nueva York.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid, España.

D´Amore, B; Fandiño Pinilla, M., I. (2005). Historia y epistemología de la Matemática como bases éticas universales. *Acta Scientiae*, *7*(1), 07-16.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: Una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación*, *Monografía* IX, 23-47.

Flores Martínez, P; Piñeiro, J. L. (2016). La introducción a la división en educación primaria. Un análisis comparativo. En *Actas del XVI congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ni más ni menos*.

Font, V. y Godino, J. D. (2006), La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 8(1), 67 – 98.*

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. *(2007).* Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. *The International Journalon Mathematics Education. 39(1-2), 127-135.*

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta ed.), México D.F., México: Mc Graw Hill Educación

Ho Kheong, F., Kee Soon, G. y Ramakrishnan Ch. *(2017). Texto para el estudiante. Matemática 5° básico. Chile Santillana Chile, S.A.*

Maza Gómez, C.; *(1991). Enseñanza de la Multiplicación y División.* Departamento de Didácticas de las Ciencias. Universidad de Sevilla, España.

mineduc. (2013). *Programa de Estudio para cuarto año de Educación General Básica.* Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile. ISBN 978-956-292-373-6

Ordoñez Montañez, C. C. (2019). Enseñanza de la división, basada en justificaciones, con estudiantes de primaria. Comunicación presentada en *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Medellín, Colombia (5 – 10 de mayo, 2019), Universidad de Medellín y Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.

Ríbnikov, K. (1974), *Historia de las Matemáticas*. Moscú.

Saíz, I. (1994). “Dividir con dificultad o la dificultad de dividir”. En Parra, C. & Saíz, I. (comps.), *Didáctica de las Matemáticas*, Buenos Aires, Argentina. Ed. Paidós.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, la matemática y la realidad.* México: Trillas.

CAPÍTULO 5

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE UN LIBRO DE EDUCACIÓN BÁSICA CHILENA

CHARACTERISATION OF THE LEVELS OF ALGEBRAIZATION IN MATHEMATICAL PRACTICES OF A PRIMARY EDUCATION TEXTBOOK

Ana Luisa Llanes Luna [1], Luis R. Pino-Fan [1],
Silvia Elena Ibarra Olmos [2]
analuisa.llanes@alumnos.ulagos.cl, luis.pino@ulagos.cl,
silvia.ibarra@unison.mx
[1] Universidad de Los Lagos, [2] Universidad de Sonora

Resumen

El objetivo de este estudio es identificar las ideas asociadas al Razonamiento Algebraico Elemental promovidas en el libro de texto de sexto año básico (11-12 años) en el contexto chileno, para lo cual se toma como referente la propuesta teórico-metodológica de los Niveles de Algebrización del Enfoque Ontosemiótico. Se realiza un análisis de contenido del libro de texto de sexto año básico, con el que se caracteriza el tipo de tareas propuestas, se identifican los objetos matemáticos primarios intervinientes en las prácticas matemáticas de dichas tareas, y se establecen los niveles de algebrización pretendidos por estas prácticas. Los resultados evidencian la existencia de problemas de naturaleza aritmética que promueven niveles incipientes de algebrización, además de

revelar un desequilibrio entre las prácticas matemáticas de estos problemas y las asociadas a niveles consolidados de algebrización.
Palabras clave: *análisis de libros de texto, niveles de algebrización, razonamiento algebraico elemental.*

Abstract

The aim of this study is to identify the ideas related to Elementary Algebraic Reasoning which are promoted by the sixth grade of primary education (11-12 years-old) textbook in the Chilean context, for which the theoretical-methodological proposal 'Levels of Algebraization' is taken as a reference. A content analysis of the textbook of sixth grade of primary is carried out, in which the type of tasks proposed is characterized, the primary mathematical objects involved in the mathematical practices of these tasks are identified, and the levels of algebraization intended by these practices are established. The results make evident the existence of arithmetic nature problems that promote incipient levels of algebraization, in addition to revealing an imbalance between the mathematical practices of these problems and those related to consolidated levels of algebraization.
Keywords: *textbooks analyses, levels of algebraization, elementary algebraic thinking.*

1. Antecedentes

Dentro del campo de la Didáctica de la Matemática, una problemática que ha sido objeto de estudio desde la década de los ochenta, y en torno a la cual se ha generado un gran número de investigaciones, es la relacionada con la introducción de ideas algebraicas en el currículo de Educación Primaria (estudiantes de 6-12 años). Esta idea surgió como una medida que buscaba subsanar lo que, a finales del siglo xx, un gran número de estudios revelaron: las dificultades involucradas cuando los estudiantes de los primeros niveles de educación secundaria (12-15 años) debían pasar de una forma aritmética a una forma algebraica de razonamiento (véase, Linchevski, 1995; Rojano y Sutherland, 2001; Wagner y Kieran, 1989).

Es pertinente señalar que, actualmente, existen dos corrientes que buscan *suavizar* la transición entre la aritmética y el álgebra, a saber, el *Early Algebra* –o álgebra temprana– y la *Pre álgebra*. Mientras que la *Pre álgebra* propone introducir el álgebra como una aritmética generalizada, principalmente, en los últimos dos cursos de la Educación Básica (o Educación Primaria) (Zapatera, 2017), el *Early algebra* tiene consecuencias epistémicas y didácticas desde los primeros cursos de la Educación Básica. Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), señalan que "epistémicamente, la inclusión del álgebra en la escuela elemental supone un cambio del foco de atención desde los aspectos simbólicos y procedimentales hacia aspectos estructurales del razonamiento algebraico" (p. 487).

Por su parte, Molina (2009) refiere que el álgebra temprana va acompañada de una amplia visión del álgebra, la cual considera, entre otros aspectos, el estudio de las relaciones funcionales, generalización de patrones, o el desarrollo y manipulación de símbolos. Asimismo, y en concordancia con otros autores (Drijvers y Hendrikus, 2003; Warren, 2003), considera a la aritmética como una vía de acceso al estudio del álgebra. Con base en este último punto, diversos investigadores sugieren aprovechar la relación que existe entre estas áreas para construir una base que permita el acceso de los estudiantes a conceptos algebraicos cada vez más avanzados (véase, Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, Pang, Schiefter y Ng, 2016). Sin embargo, en algunos países (como en Chile) aún no se ha vislumbrado un vínculo explícito en los currículos de matemáticas del nivel de educación básica entre el estudio de ideas aritméticas y algebraicas, situación que sí sucede en el nivel de educación media (secundaria).

A nivel internacional, un gran número de investigaciones basadas en el análisis, tanto de libros de texto, como de planes y programas de estudios, o del currículo para la educación básica, han evidenciado cuáles son las nociones clave del álgebra temprana en los primeros niveles de educación, y de qué forma son introducidas (Aké y Godino, 2018; Castro, Martínez-Escobar y Pino-Fan, 2017; Fong, 2004; Lew, 2004; Mejías, 2019; NCTM, 2000; Watanabe, 2008). Por ejemplo, Cai (2004) reporta que la idea de ecuación y su resolución comienza desde el primer grado de primaria en los libros de texto, ello a partir de la concepción de la resta como un procedimiento inverso a la suma. Por otra parte, en los grados cuarto, quinto y sexto (estudiantes de 11-13 años), la se introduce como un lugar para ubicar números desconocidos en el contexto de resolución de ecuaciones. En este sentido, para el currículo chino, "el propósito dominante del aprendizaje del álgebra es ayudar a los estudiantes a representar mejor y a entender las relaciones cuantitativas" (Cai, 2004, p. 127).

Atendiendo a estos antecedentes, resulta importante cuestionarse: ¿qué ideas asociadas al desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental son promovidas en el libro de texto para sexto año básico? Para ello, en primer lugar, se caracteriza el tipo de tareas propuestas en este libro de texto; luego, se identifican los *objetos matemáticos primarios* puestos en juego en las *prácticas matemáticas* de referencia asociados a las tareas caracterizadas; y, finalmente, se establecen los niveles de algebrización pretendidos por estas *prácticas matemáticas*.

2. Niveles de algebrización onto-semióticos

Este trabajo se sustenta sobre la propuesta de Niveles de Algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino et al, 2015), herramienta teórico-metodológica propuesta por el Enfoque Onto-Semiótico (EOS), que permite caracterizar el *razonamiento algebraico* en términos de las representaciones usadas y los procesos de generalización implicados, así como el cálculo analítico que se pone en juego durante la *práctica matemática* asociada a un tipo de tareas algebraicas. En particular, se concibe al razonamiento algebraico –para educación básica– como el "sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.)" (Castro, Godino y Rivas, 2011, p. 75), denominado también como Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). En términos del EOS, se define como *práctica matemática* "a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 182). En este marco se distinguen seis tipos de *objetos matemáticos primarios*: situaciones-problema, lenguajes, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Godino y colaboradores (Godino et al., 2014; Godino et al., 2015) operativizan la definición de RAE dada en el seno del EOS, por medio de siete niveles progresivos de razonamiento algebraico: los primeros cuatro niveles (N0, N1, N2 y N3) se asocian a la educación básica, mientras que los tres restantes se asocian a la educación secundaria y bachillerato (N4, N5 y N6). Es preciso subrayar que,

> si bien los niveles proponen una gradación de las características algebraicas que pueden surgir en la solución de las tareas matemáticas escolares, se ha encontrado que es posible valorar una tarea como de un nivel u otro, en función del tipo de solución que se proponga, con lo cual la posible actividad matemática, de carácter algebraico, que un estudiante puede desarrollar, se predice en un rango aproximado. (Castro et al., 2017, p. 186)

Para el desarrollo de este estudio se consideran los primeros cuatro niveles de la propuesta (N0-N3). A continuación, se describen los niveles de interés y sus características (Godino et al., 2014),

- *Nivel 0* (*ausencia de razonamiento algebraico*): Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas estructurales no se reconocen propiedades; en tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.

- *Nivel 1* (*nivel incipiente de algebrización*): Intervienen objetos intensivos (generales) cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. Se identifican propiedades, equivalencias numéricas y relaciones a partir de tareas estructurales, mientras que en tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

- *Nivel 2* (*nivel intermedio de algebrización*): Intervienen cantidades indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico o simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $\pm \quad =$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

- *Nivel 3* (*nivel consolidado de algebrización*): Son generados objetos intensivos representados de manera simbólica-literal, y se opera con ellos; se elaboran transformaciones en la forma simbólica de las expresiones, conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $\pm \quad = \quad \pm$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

3. Metodología

El presente trabajo, de corte cualitativo (Cohen, Manion y Morrison, 2018), se basa en el análisis del contenido (Gil, 1994), específicamente de las *prácticas matemáticas* propuestas en libros de texto, para caracterizar el RAE en términos de objetos matemáticos y niveles de algebrización.

3.1. Contexto del estudio

En las Bases Curriculares para la Educación Básica (de primero a sexto año), propuestas por el Ministerio de Educación de Chile

(MINEDUC), se establecen los Objetivos de Aprendizaje, que dan cuenta de los conocimientos, las habilidades y las actitudes que los estudiantes (de 6 a 12 años) deben lograr para satisfacer los objetivos generales de este nivel educativo (MINEDUC, 2018). En este documento curricular se consideran 12 asignaturas de carácter obligatorio para todos los establecimientos del país, entre las que se encuentra la asignatura Matemática, cuyo propósito es

> Enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar. (MINEDUC, 2018, p. 214)

La organización curricular de esta asignatura se estructura a través de: a) Habilidades, b) Ejes y c) Actitudes. Con respecto a las Habilidades, particularmente se establece que cada una de éstas (resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar) tiene un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, así como en la aplicación de conocimientos para resolver las tareas matemáticas y de otros ámbitos. Los conceptos matemáticos se presentan en cinco ejes temáticos: Números y operaciones, Patrones y álgebra, Geometría, Medición, y Datos y probabilidades.

Por otra parte, cada año el MINEDUC pone a disposición de la comunidad educativa una serie de recursos, como actividades complementarias, libros de actividades (cuadernillos de ejercicios), textos oficiales (guía didáctica del docente y texto del estudiante), imágenes, documentos interactivos, presentaciones de videos, entre otros, para cada uno de los niveles de la educación básica. Además, este organismo distribuye de manera gratuita libros de texto a estudiantes de instituciones de dependencia pública y mixta a lo largo del país. Estos libros de texto tienen por objetivo exhibir los contenidos y requerimientos para cada uno de los niveles, en consonancia con lo planteado en las Bases Curriculares, y su elaboración se adjudica por concurso público, por lo que existe más de una editorial a cargo del diseño de los textos. Por motivos de espacio, en este trabajo sólo se reportan los resultados obtenidos del análisis del libro de texto para sexto año básico (estudiantes de 11-12 años).

3.1.1. Matemática para sexto básico

El texto de estudio de Matemática para sexto año básico (Maldonado y Castro, 2016), distribuye los contenidos matemáticos en cuatro unidades temáticas: 1) Números y operaciones, 2) Patrones y álgebra, 3) Geometría y medición, y 4). Datos y probabilidades. Cada unidad consta de las siguientes secciones: *Inicio de unidad*, *Evaluación inicial*, *Inicio de tema*, *Páginas de contenido*, *Evaluación de proceso*, *Evaluación final* y *Páginas complementarias*. Por ejemplo, en las *Páginas de contenido* se presenta una situación exploratoria relacionada con el hilo conductor de la unidad (*Exploro*); asimismo, se presentan diferentes actividades para practicar lo estudiado (*Practico*), y contenidos matemáticos con variados ejemplos desarrollados paso a paso (*Aprendo*).

3.2. Análisis de las prácticas matemáticas

El análisis del libro de texto se desarrolla a través del análisis de contenido (Gil, 1994) y los Niveles de Algebrización (Godino et al., 2014), específicamente de las prácticas matemáticas propuestas en el libro de texto de sexto básico. Desde el punto de vista de Gil (1994), las tareas que integran el proceso del análisis de información cualitativa son: 1) reducción de información (separación de la información mediante temas, conceptos, tipologías o proposiciones), 2) disposición de la información (identificación y clasificación de las unidades a través de la agrupación, categorización y codificación) y 3) obtención y verificación de conclusiones (refinamiento de categorías), las cuales se detallan a continuación:

1. *Reducción de la información:* La información que se analiza se obtiene del texto de Matemática sexto básico. En particular, se analizan las prácticas matemáticas propuestas en las unidades 1 y 2, ya que los conceptos matemáticos promovidos en estas unidades se relacionan con nociones características del álgebra temprana (incógnita, patrones, aritmética, simbolización, etc.) y se consideran como promotores del razonamiento algebraico en algún nivel de algebrización. La información de interés se organizó en *Bancos de tareas* (tablas de doble entrada, elaboradas por los investigadores).

2. *Disposición de la información:* Una vez seleccionada la información de interés, y organizada en el Banco de tareas, las situaciones-problema fueron resueltas una a una utilizando como referente las prácticas matemáticas que se proponen en las secciones de Aprendo (generalmente a través de ejemplos). Una vez resultas las tareas, apoyados con la propuesta de Niveles de algebrización se identifican los objetos algebraicos (incógnita, ecuación, patrones, simbolización, etc.), se genera una tipología de problemas y finalmente se establece el nivel de algebrización. Es preciso señalar, que el nivel de algebrización no se establece al problema *per se*, sino que a la *práctica matemática* que resuelve el problema.

3. *Refinamiento de categorías:* Una vez obtenida la información sobre el tipo de problemas, los objetos algebraicos y los niveles de algebrización, se cuantificaron cuantos problemas de cada tipo se identificaron, así como que niveles de algebrización se

asociaban a las prácticas matemáticas por tipo de problema. Además, se observó que era necesario generar un refinamiento de las categorías. Para elaborar este refinamiento se consideraron los objetivos de las tareas, por ejemplo, hacer uso de propiedades en conjuntos de números (primos, compuestos, fracciones, etc.), operar cantidades numéricas (suma, resta, división o multiplicación de números naturales o racionales positivos) o representar y resolver problemas (con números decimales, fracciones, razones o porcentajes, etc.), entre otros.

4. Resultados

El análisis realizado ha evidenciado la existencia de nociones asociadas al desarrollo del RAE, como ecuación de primer grado, término general, expresión algebraica y propiedades de los números (naturales y racionales positivos). Entre los procesos identificados se encuentran los de generalización, particularización, argumentación, algoritmización, y significación. Además, los resultados evidencian que las prácticas propuestas para este grado escolar, en particular, movilizan los tres niveles de algebrización (niveles proto-algebraicos y nivel consolidado de algebrización), así como el nivel asociado al trabajo aritmético (nivel 0). Se han caracterizado 28 tipos de tareas asociadas a prácticas matemáticas promotoras del RAE.

4.1. Nivel 0 de algebrización: objetos y procesos matemáticos identificados

Las prácticas vinculadas a este nivel de algebrización generalmente se ponen en juego al resolver situaciones-problema de naturaleza aritmética, por ejemplo, tareas en las que se pide encontrar múltiplos, factores y divisores de números naturales o sumas, restas, divisiones o multiplicaciones de fracciones, números mixtos, porcentajes o razones. Las cantidades desconocidas no son tratadas de manera analítica ya que el signo igual representa un operador, por ejemplo, en la sentencia numérica 2 1/2+1/5= el signo igual implica la adición de números mixtos y fracciones para obtener el lado derecho (2 1/2+1/5=27/10). (En general, las definiciones, los procedimientos y proposiciones se plantean a través de los lenguajes materno, icónico y numérico. Los argumentos son generados (en su mayoría) por lo estudiantes, por lo que se requiere un proceso de argumentación el cual se apoya en evidencia visual, numérica o gráfica para justificar, principalmente, los resultados obtenidos. Predominan los procedimientos de tipo numérico: resolver con operaciones combinadas, determinar múltiplos, divisores o factores de números naturales, determinar el mínimo común múltiplo, determinar la suma o la resta de fracciones y números mixtos, entre otros. Se identifican procesos de significación para el signo igual, en particular se observa que este es considerado como un operador; es decir, el valor de la cantidad desconocida se obtiene de operar un lado la expresión numérica planteada. Además, otro proceso que se ha identificado en este tipo de prácticas es el de algoritmización. Este es un proceso recurrente en la solución de este tipo de tareas, las prácticas matemáticas de referencia señalan que, por ejemplo, para obtener los divisores de un número es necesario dividir de manera exacta, para ello recurren al uso del algoritmo de la división. En general, el proceso de algoritmización consta en la aplicación o el uso de una secuencia de pasos o instrucciones –en este libro de texto presentadas en las secciones de *Aprendo*–, las cuales realizadas en orden conducen a obtener la solución de un problema.

4.2. Prácticas en niveles proto-algebraicos

Las situaciones-problema que ponen en juego prácticas en niveles proto-algebraicos se vinculan a las nociones algebraicas patrón, expresiones algebraicas e incógnita. En particular, las prácticas matemáticas de naturaleza aritmética del nivel 1 de algebrización, concretamente movilizan nociones como propiedad conmutativa, asociativa y distributiva, así como aquéllas que se vinculan a conjuntos de números (por ejemplo, propiedades de los números primos). Entre los procesos identificados en este tipo de prácticas se encuentran el de argumentación, generalización, representación, significación.

En particular, el proceso de generalización se lleva a cabo en ambos niveles proto-algebraicos, para ejemplificar considere la tarea tipo *Identificar la regla (patrón) de formación y completar la sucesión*. Se ha identificado que los conceptos-definiciones vinculados a este tipo de tarea son: patrón, patrón numérico, secuencia, secuencia numérica, regularidad, tabla, posición y término. Estos conceptos se presentan a través de lenguaje materno, icónico y numérico, apoyados por elementos como tablas para disponer la información y datos numéricos. Los procedimientos versan en la obtención de regularidades, basados en tablas, para generar el patrón que permite obtener otros términos de la secuencia. Mayormente, los procedimientos son de tipo numérico y los patrones pueden ser de adición, sustracción, multiplicación o división. Los procedimientos de tipo icónico se basan en "completar" secuencias figurales, para ello es necesario determinar el patrón de formación y después dibujar los términos solicitados. Los argumentos se identifican como procesos que debe generar el estudiante, los cuales versan en justificar las respuestas obtenidas o el uso de estrategias para obtener los resultados. Al analizar las prácticas de nivel 1 y 2, se observó que la configuración epistémica de objetos matemáticos primarios es similar; sin embargo, la diferencia radica en el proceso de generalización. Para las prácticas de nivel 1, los patrones se obtienen a través de representaciones concretas y la generalización se lleva a cabo con elementos cercanos de la secuencia, por ejemplo, para la siguiente secuencia numérica se solícita identificar un patrón y escribir los siguientes tres términos que continúan en la secuencia a) 24,33,42,51,60,... (Maldonado y Castro, 2016, p. 93); el patrón es: *sumar* 9 (+9), y los siguientes tres términos son . Podemos observar que, a partir de recuentos explícitos, en este caso basado en el cálculo numérico "es posible determinar el valor de patrones específicos en función del lugar que ocupan en la serie, sin recurrir, nuevamente, al recuento efectivo ni a la representación del patrón completo (generalización cercana)" (Gaita y Wilhelmi, 2019). Ahora, en el caso de las prácticas de nivel 2, los patrones (análogamente al nivel 1) se obtienen a través de representaciones concretas. En particular, en este nivel de generalización, si bien no se manipula la escritura formal (no se establece el término general), sí se establecen relaciones entre los términos y las posiciones de la secuencia, y el término general se expresa en lenguaje materno, numérico o figural. La figura muestra un ejemplo de una tarea donde se debe calcular la base del triángulo en la posición 41, a partir de los datos dados.

5. Los valores correspondientes a la medida de la base de ciertos triángulos isósceles siguen una secuencia, cuyo patrón de formación es sumar 3. Si la base del triángulo 1 mide 4 cm, ¿cuál es la medida de la base del triángulo 41?

Figura 1. Ejemplo de tarea tipo Identificar la regla (patrón) de formación y completar la sucesión

Fuente: Maldonado y Castro (2016, p. 98)

Posición del término	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Valor del término	4	7	10	13	16	19
Relación	$4 = 4 + 0$ $4 = 4 + 3 \cdot 0$	$7 = 4 + 3$ $7 = 4 + 3 \cdot 1$	$10 = 4 + 3 + 3$ $10 = 4 + 3 \cdot 2$	$13 = 4 + 3 + 3 + 3$ $13 = 4 + 3 \cdot 3$	$16 = 4 + 3 + 3 + 3 + 3$ $16 = 4 + 3 \cdot 4$	$19 = 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ $19 = 4 + 3 \cdot 5$

Figura 2. Tabla que relaciona la posición y términos de la tarea presentada en la Figura 1

Fuente: Elaboración propia

La Figura 2 muestra una tabla donde se relacionan el término y la posición (según la práctica matemática de referencia para este tipo de tareas) y en la cual se observa como generar un elemento de la secuencia, en lenguaje materno esto se traduce como el valor del término se obtiene de sumar 4 al producto de los números 3 y la posición del término menos 1. Entonces la base del triángulo en la posición 41 se obtendría de la siguiente manera $4 + 3 \times 40 = 124$.

4.3. Nivel consolidado de algebrización: objetos y procesos matemáticos identificados

Las tareas matemáticas ponen en juego prácticas matemáticas vinculadas a las nociones de expresión algebraica y patrones. Los lenguajes son de tipo materno, numérico y simbólico-literal (lenguaje algebraico), además se observa el uso de representaciones icónicas para representar y operar –algunas– expresiones algebraicas. Los conceptos-definiciones como término general (expresión general, regla general) y expresión algebraica son introducidos mediante lenguaje materno y se ejemplifican algunos casos como procedimientos de como operar con ellos, o en el caso del término general como generarlo. En cuanto a los procedimientos, se observa la manipulación de la escritura formal para obtener expresiones más simples (por ejemplo, $a+a+a+8$ donde a se debe "agrupar" luego). Además, se describe como generar el término general, en este caso se hace uso de representaciones tabulares para relacionar los términos con su posición (ver figura 2) y después expresar mediante lenguaje algebraico (al que también se le denomina lenguaje matemático) la regla para generar cualquier término de la secuencia. Por ejemplo, en el caso de la Figura 1 la regla estaría dada (según la práctica matemática de referencia) por $4+3(n-1)$. Análogamente a los otros niveles, el argumento se idéntica como proceso el cual debe realizar el estudiante, es pertinente subrayar que la argumentación es una de las cuatro habilidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes de educación básica, por lo que este tipo de objetos matemáticos son generados por los estudiantes con el objetivo de tratar de convencer a los demás estudiantes de la validez de los resultados que se obtienen a la hora de resolver las tareas propuestas (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018). Es claro que la actividad matemática se desarrolla en un nivel consolidado de algebrización, y los procesos como en el de generalización se observa la construcción de objetos intensivos (términos generales) que representan la generalidad, en casos particulares como el término de una sucesión y que permite la construcción de cualquier elemento de esta.

En síntesis, en el libro de texto se ha identificado el desarrollo progresivo del RAE a través de tareas de naturaleza aritmética como algebraica. Los procesos de generalización van desde el trabajo con casos particulares (objetos extensivos) hasta la introducción de términos generales que representan (para este nivel educativo) objetos intensivos. Como se expresa al inicio de esta sección, se han caracterizado 28 tipos de tareas asociadas a prácticas matemáticas promotoras del RAE, 11 de las cuales se vinculan al eje de Patrones y álgebra y versan sobre tres nociones: incógnita (en ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$, $\pm Ax = C$ con B, C N), patrones, expresiones algebraicas. Las 17 tareas restantes se asocian con el eje de Número y operaciones, las nociones identificadas son: múltiplos, factores y divisores de números naturales y sumas, restas, divisiones o multiplicaciones de fracciones, números mixtos, porcentajes o razones.

5. Reflexiones finales

Retomando la pregunta de este estudio, sobre qué ideas asociadas al desarrollo del razonamiento algebraico son promovidas en el libro de texto para sexto año básico, se han identificado conceptos como igualdad, relaciones funcionales, generalización de patrones, el desarrollo y manipulación del lenguaje simbólico-literal, propiedades estructurales de los números reales (asociatividad, conmutatividad, entre otras) y reglas generales de las operaciones, nociones asociadas al desarrollo del razonamiento algebraico (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran et al., 2016). Asimismo, se han identificado procesos de generalización, algoritmización y argumentación, entre otros.

Los resultados obtenidos evidencian la introducción de ideas asociadas al álgebra temprana, siendo éstas no sólo de naturaleza algebraica, sino que también aritmética. Con base en ello, queda de manifiesto la necesidad de una mayor vinculación entre los ejes de 'Números y operaciones' y 'Patrones y álgebra' puesto que, a diferencia de lo estipulado para los niveles de educación media (7° básico a 2° medio, estudiantes de 12 a 15 años), donde se establece que los ejes de 'Números' y 'Álgebra y funciones' se relacionan fuertemente (MINEDUC, 2016), las directrices curriculares de educación básica (1° a 6° año) no aluden a ningún tipo de relación entre estos ejes, lo que podría implicar que la aritmética no se considere como una característica del RAE, y solamente se considere a los objetos de naturaleza algebraica como elementos promotores de éste. Sin embargo, los resultados obtenidos han demostrado la existencia de elementos de naturaleza aritmética que permiten construir y expresar generalizaciones, como los mencionados al comienzo de este apartado, y de acuerdo con Warren (2003) deberían considerarse como acceso clave al álgebra.

En cuanto a los niveles de algebrización, se identificaron prácticas que se vinculan con los niveles 0 al 3. Si bien se distingue la movilización de niveles consolidados de algebrización, es evidente el gran desequilibrio que existe entre el número de prácticas del nivel 3 (31 prácticas) con el del nivel 0 (198 prácticas) de algebrización. Por esta razón, sería conveniente lograr un equilibrio entre ambos niveles y los proto-algebraicos, a través del aumento de situaciones-problemas que admitan prácticas matemáticas en el nivel 3 de algebrización.

Por otra parte, la propuesta de niveles de algebrización es considerada como una herramienta teórico-metodológica con gran potencial para predecir la actividad matemática asociada al desarrollo del RAE, sin embargo, el análisis aquí presentado ha mostrado la necesidad de refinar esta propuesta, específicamente, en lo que respecta a los descriptores de las tareas de generalización. Mientras que para los niveles 0 y 3 se hace una distinción evidente de cómo caracterizar una práctica matemática, en los niveles 1 y 2 no existe una diferencia sustancial de cómo distinguir si una práctica pertenece a un nivel u otro. Si bien para el nivel 0 se hace un reconocimiento explícito de la regla (patrón) de formación que relaciona un término con el siguiente (lo que no implica un proceso de generalización), y en el nivel 3 se formula una regla canónica (a través del lenguaje simbólico-literal), en los niveles 1 y 2 (proto-algebraicos) se señala que en tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. Ante esto cabe preguntarse: ¿cuáles son las diferencias sustanciales entre una tarea funcional de nivel 1 y de nivel 2? Atendiendo a esta interrogante, este estudio pretende dar luces de cómo contribuir a dicho refinamiento.

Finalmente, las Bases curriculares establecen que "una base sólida en patrones facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico" sin embargo se ignora si realmente en el contexto chileno el acercamiento con dicha noción facilite o propicie el desarrollo de ese pensamiento más abstracto. Aunado a esto, se reconoce que los resultados obtenidos en esta investigación, si bien han sido fruto del análisis de un libro de texto oficial, deben ser considerados parciales, puesto que existen textos del estudiante autorizados a los que las instituciones (privadas, principalmente) tienen acceso y prefieren por encima de los textos oficiales, lo que podría implicar la existencia de otro tipo de prácticas matemáticas asociadas al razonamiento algebraico promovidas en la Educación Básica en Chile.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación FONDECYT No. 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática, 30*(2), 171-201. https://doi.org/10.24844/em3002.07

Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the Chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore), 8*(1), 107-130.

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early Algebrización: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Berlín, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705) Charlotte, NC: Information Age Publishing, NCTM.

Carraher, D., Schliemann, A. y Brizuela, B. (2000), Early Algebra, early Arithmetic: Treating operations as functions. En M. L. Fernández (Ed.), *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1). Conferencia magistral presentada en el PME-NA. Tucson: AZ.

Castro, W. F., Godino, J. D. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 25*, 73-88.

Castro, W., Martínez-Escobar, J. y Pino-Fan, L. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: Análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education, 6*(2), 164-191. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.1981

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8va ed.). Nueva York, NY: Routledge.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter* (Tesis doctoral no publicada). Utrecht University, Países Bajos.

Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore), 8*(1), 39-59.

Gaita, R. y Wilhelmi, M. R. (2019). Desarrollo del razonamiento algebraico elemental mediante tareas de recuento con patrones. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 33*(63), 269-289. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

Gil, J. F. (1994). *Análisis de Datos Cualitativos. Aplicaciones a la investigación educativa*. Barcelona, España: PPU.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. y Batanero, M.-C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching.* Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Lew, H.-C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator (Singapore), 8*(1), 88-106.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 113-120. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90026-8

Maldonado, L., y Castro, C. (2016). *Matemática 6º básico. Texto del Estudiante*. Santiago, Chile: Ediciones Santillana.

Mejías, C. A. (2019). *Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria* (Tesis doctoral).

Recuperado desde Repositorio Digital de la Universitat de Girona. (https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/17137)

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio*. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Santiago, Chile: Autor.

Molina, N. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 3*(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Autor.

Rojano, T., y Sutherland, R. (2001). Arithmetic world-algebra world. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 515–522). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. y Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. En N. A. Pateman, B. G. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America* (Vol. 4, pp. 127-134). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Wagner, S. y Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En C. Kieran y S. Wagner (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 220-237). Reston, VA: NCTM-Lea.

Warren, E. (2003). Young children's understanding of equals: a longitudinal study. En N. A. Pateman, B. G. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America (Vol. 4, pp. 379-387). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 183-193). Seventieth Yearbook. Reston, VA: NCTM.

Zapatera, A. (2017). Como los alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 20(3), 87-114. https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2114

CAPÍTULO 6

USO DEL CONSTRUCTO IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO EN EL DISEÑO DE UNA TAREA DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA: EL CASO DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

USING THE DIDACTIC SUITABILITY CONSTRUCT OF ONTO-SEMIOTIC APPROACH TO DESIGN A MATH TASK AT SECONDARY SCHOOL: THE CASE OF GEOMETRY

Elvira Garcia Mora, Javier Díez-Palomar
elviragarciamora@ub.edu, jdiezpalomar@ub.edu
Universitat de Barcelona

Resumen

Las tareas relacionadas con el aprendizaje de la geometría permiten aplicar el constructo "idoneidad didáctica" para analizar su diseño e implementación en el aula. Los indicadores presentes señalan aspectos que hacen que dicha sesión sea considerada "idónea", mientras que los ausentes sirven para orientar el rediseño de la tarea. A partir de esta premisa, este trabajo de investigación se organizó en tres etapas: (1) análisis de la tarea, (2) rediseño de la tarea y análisis de su implementación en el aula y (3) segundo rediseño y análisis de su implementación en el aula. Esta secuencia

de análisis y diseño de tareas permitió observar que la búsqueda del aumento del nivel de logro de un criterio influye de manera significativa sobre los otros criterios.

Palabras clave: *idoneidad didáctica, análisis didáctico, geometría, secundaria, diseño de tareas.*

Abstract

The task design and classroom implementation addressed to the learning of geometry can be analyzed using the construct "didactic suitability". The present indicators point out the aspects that make this session could be considered as a "suitable lesson", while the absent ones guide the redesign of the task. Based on this premise, this research work was organized in three stages: (1) analysis of the task, (2) task redesign and analysis of its implementation in the classroom and (3) second redesign and analysis of its implementation in the classroom. This sequence of analysis and task design allowed us to observe that the search of achievement level increment of one facet has a significant impact on the other facets.

Keywords: *didactic suitability, didactical analysis, geometry, secondary school, task design.*

1. Antecedentes

La enseñanza de la geometría permite a los profesores introducir a los alumnos al estudio cuasi simultáneo de las matemáticas, las ciencias y la cultura (Brousseau, 2000). El estudio de los diversos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje en los cuales pueden desempeñarse tanto los profesores como los alumnos fue la tarea de investigación que condujo a la implementación de una metodología para sistematizar el diseño de tareas y/o secuencias didácticas, a partir de la colaboración entre profesores, con el objetivo de diseñar prácticas docentes definidas como "idóneas." El contraste de algunos marcos teóricos para el análisis de la actividad matemática que ocurre durante una clase de matemáticas nos llevó a elegir la noción del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: la *idoneidad didáctica* (Godino, 2013), como marco de trabajo.

1.1. La idoneidad didáctica

Godino (2013) describe al Enfoque Ontosemiótico (eos) como un "marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje" (p. 114). Por su parte, Font, Planas y Godino (2010) definen la noción de *idoneidad didáctica* como "un modelo que permite un análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios", particulares y globales, que suceden durante una sesión de matemáticas (p. 104).

De manera más concreta, Godino (2013) define a la *idoneidad didáctica* de cualquier tarea de índole matemática "como la articulación coherente y sistémica" (p. 115) de seis componentes: idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad afectiva e idoneidad ecológica.

Godino (2013) recurre a un hexágono regular como metáfora para representar de manera visual estas seis facetas. En esta "metáfora" Godino esquematiza la relación, articulación y equilibrio entre los seis componentes y a la vez los relaciona con una característica principal: representatividad, proximidad, negociación, disponibilidad, implicación y adaptación (ver la Figura 1). Así mismo, los componentes hacen referencia a procesos y momentos concretos del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Tabla 1).

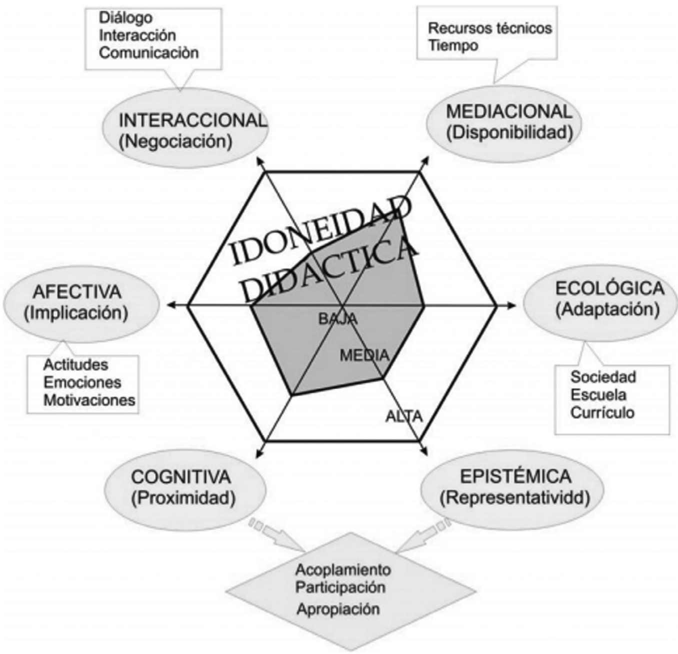


Figura 1. Esquema representativo de la idoneidad didáctica

Fuente: Godino (2013, p. 116)

Tabla 1. *Descripción de los criterios de la idoneidad didáctica* (Fuente: Godino, 2013, p. 116)

Criterio	Descripción del componente
Idoneidad Epistémica	Representatividad de los significados pretendidos/de referencia
Idoneidad Cognitiva	Proximidad entre los significados logrados y los pretendidos
Idoneidad Interaccional	Identificación y solución de conflictos semióticos potenciales
Idoneidad Mediacional	Grado de disponibilidad de los materiales y tiempo necesarios
Idoneidad Afectiva	Grado de implicación del alumno en el proceso de estudio
Idoneidad Ecológica	Grado de ajuste del proceso de estudio al proyecto educativo

Godino (2013) presenta una "pauta para el diseño y valoración de acciones formativas" (p. 118) en la cual asigna a cada componente de la *idoneidad didáctica* una serie de indicadores que ayudan identificar sus respectivos aspectos característicos. En un trabajo posterior, Breda, Font y Pino-Fan (2018) detallan más los componentes presentados por Godino (2013). Estos autores proponen el concepto de *criterio* que, a diferencia de las facetas, se puede concretar en una serie de indicadores que permiten medir cada una de las seis idoneidades mencionadas más arriba, de manera que contribuyen a ampliar de la noción *idoneidad didáctica*. Partiendo de esta "operacionalización" del concepto de idoneidad didáctica, en este trabajo lo hemos interpretado como una pauta de observación y reflexión organizada en seis criterios que agrupan una lista de componentes que a la vez se descomponen en una serie de indicadores (Figura 2).

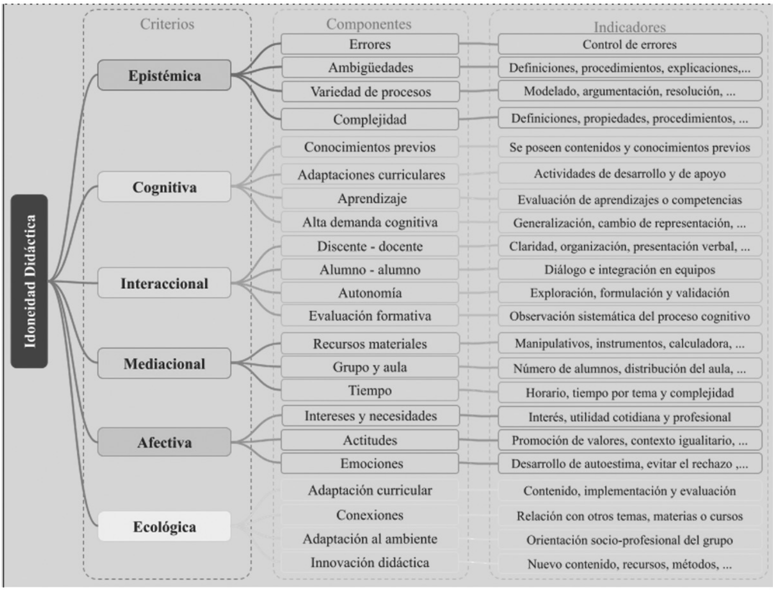


Figura 2. Esquema representativo de los indicadores de los componentes de los seis criterios de la *idoneidad didáctica* según Godino (2013) y Breda, Font y Pino-Fan (2018)

Los indicadores de cada uno de los componentes de los seis criterios de la idoneidad didáctica permiten analizar didácticamente las tareas y, a la vez, identificar aspectos susceptibles de rediseño para la mejora de esas unidades didácticas. El análisis didáctico utilizando los criterios de idoneidad didáctica para analizar las tareas de geometría permite observar la evolución de las propuestas que hace el profesor y cómo las va mejorando a partir de la retroalimentación que recibe cuando las pone en práctica en el aula.

2. Propuesta

El modelo curricular mexicano de 2011 (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011) se caracterizó por la instrucción reiterada de los contenidos. En cada uno de los cinco bloques en los que se dividía el curso escolar, se estudiaban los tres ejes temáticos: (1) Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, (2) Forma, Espacio y Medida y (3) Manejo de la Información. A lo largo de los cinco períodos se esperaba que los profesores programaran secuencias didácticas para que los alumnos realizaran razonamientos que comenzaran desde los aspectos básicos y gradualmente alcanzaran los más complejos. Por ejemplo, en el caso del primer grado de secundaria, las intenciones didácticas de los contenidos de este currículo tipo espiral ascendente (Bruner, 1977) tomaban como tema de partida la mediatriz, la bisectriz y los polígonos regulares, para finalizar con la construcción de circunferencias (SEP, 2011). Con el propósito de generar una tarea con la cual evaluar de manera integrada los contenidos curriculares del eje "Forma, Espacio y Medida", el profesor (titular de este estudio de investigación) diseñó una tarea de dibujo geométrico con la cual se trabajasen simultáneamente los objetivos de aprendizaje de los cinco bloques de estudio de ciclo escolar.

La práctica como profesor de matemáticas en nivel secundaria en México desarrolló la curiosidad científica que llevó al autor a profundizar en el estudio de la realidad del aula, pero desde la perspectiva de la didáctica por medio de una investigación doctoral. En el plan de investigación doctoral presentado inicialmente se propusieron unos objetivos que se modificaron a partir de las diferentes evaluaciones del proyecto. La actualización de tales objetivos es la siguiente:

i. Aplicar el constructo "idoneidad didáctica", desarrollado en el marco del Enfoque Onto-Semiótico (Godino, Batanero y Font 2007; Godino, 2013), como herramienta de análisis y reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas, para analizar la respuesta de alumnos de primer grado de ESO a secuencias didácticas de razonamiento geométrico.

ii. Generar una valoración cuantitativa de los componentes de la idoneidad didáctica a partir de la medida del nivel de logro de sus indicadores.

iii. Identificar el nivel de logro de los criterios de idoneidad didáctica de las secuencias de razonamiento propuestas, para re-diseñarlas con el fin de que den respuesta al alcance de todos los criterios del constructo "idoneidad didáctica".

En la tarea cotidiana del profesor, la creación de contenidos para el aula es una actividad constante. La comunicación entre los profesores favorece actitudes de cooperación y provee de los elementos de la metodología de estudio de clases (Fernández y Yoshida, 2004) que consideran la planeación, observación y reflexión de la tarea docente propia y de otros compañeros profesores. Como resultado de la reflexión del profesor sobre sus propias secuencias didácticas y la discusión de ellas con otros profesores del centro escolar, se pueden establecer ciclos de mejora de las tareas presentadas a los alumnos. En este proceso, la *idoneidad didáctica*, puede emplearse como una herramienta recurrente en las diferentes etapas de creación, diseño y rediseño.

El desarrollo de la etapa experimental de este proyecto se ha realizado en tres etapas: (1) diseño de partida, (2) sesión de estudio de clases para la mejora de la secuencia de partida, (3) nuevo diseño del profesor para atender las particularidades del grupo. Las tres etapas del proceso fueron analizadas desde la perspectiva del EOS, utilizando los criterios de idoneidad didáctica.

La etapa 1 corresponde al diseño de partida que consistió en una sesión para alumnos de secundaria en la cual se tuvo como objetivo realizar un dibujo geométrico. Tal producción resulta del seguimiento de una serie de instrucciones escritas y del uso de instrumentos de dibujo como la regla, el compás, la escuadra y el cartabón (Figura 3). Los estudiantes tienen una hoja donde pueden seguir las instrucciones para construir su dibujo geométrico. Por otro lado, se les facilitan los utensilios de dibujo mencionados más arriba. Tanto la hoja de instrucciones diseñada por el profesor como los dibujos realizados por los alumnos fueron analizados con los criterios de la idoneidad didáctica (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

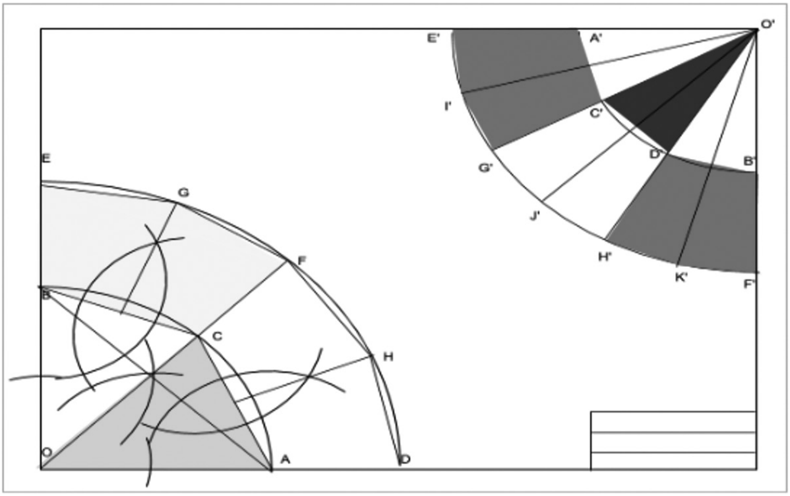


Figura 3. Muestra de la producción esperada para la Etapa 1

En la etapa 2 se sostuvo una sesión de estudio de clases para la discusión de la tarea con otros profesores de la cual se produjo un nuevo diseño de tarea de dibujo geométrico que tuviera en cuenta las orientaciones que se desprenden del análisis previo antes mencionado. La nueva propuesta consistió en la realización colaborativa del dibujo de las caras de un octaedro en el contexto de un concurso de globos aerostáticos. La construcción del cuerpo geométrico se realizó también de manera grupal (Figura 4). De nuevo, se usaron los criterios de idoneidad didáctica para analizar las construcciones.

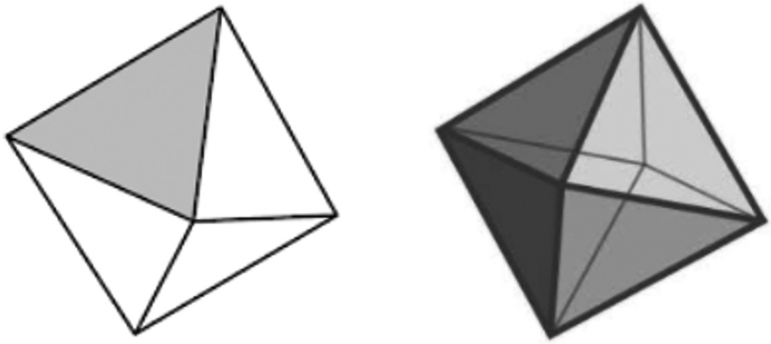


Figura 4. Muestra de la producción esperada para la Etapa 2

Este análisis mostró que la idoneidad mediacional a menudo quedaba sub-representada: no era tenida en cuenta. Por eso, en la etapa 3 se propuso una nueva actividad para introducir ese aspecto. Se trató de una actividad de desarrollo abierto de un dibujo geométrico sobre una de las habitaciones del hogar de los estudiantes (Figura 5). Igual que en las etapas previas se mantuvieron los objetivos de aprendizaje y se tuvieron como referencia las discusiones de las tareas realizadas previamente. En este caso se consideró el gráfico comparativo de los criterios de la *idoneidad didáctica* que se generó por medio de la identificación del cumplimiento de los indicadores de los componentes de cada criterio. Dichos indicadores orientaron sobre las actividades a modificar para el nuevo planteamiento de la tarea.

¡Utiliza lo que has aprendido!

Describe tu habitación

¿Cuáles son las medidas de tu habitación?

a) Determina su ancho, su longitud y su altura.
- → Comprueba las medidas al realizarlas desde diferentes sitios para comprobar que coinciden.

b) Realiza un croquis donde representes tu habitación.
- → Elige una escala conveniente que te permita comprobar datos.

c) Complementa el croquis de tu habitación con las medidas de las diagonales del piso y las diagonales entre un punto del piso con un punto del techo.

Figura 5. Muestra de las instrucciones de la tarea para la Etapa 3

3. Análisis y discusión

La caracterización de la *idoneidad didáctica* de los diseños de las tareas propuestas en las tres etapas se obtuvo a partir de Godino (2013), que propone una serie de indicadores de los componentes de cada una de las seis facetas de la idoneidad didáctica. Este enfoque inicial, se desarrolló a partir de las contribuciones de Breda, Font y Pino-Fan (2018), que hablan de criterios de idoneidad didáctica, que se concretan en componentes e indicadores en cierta manera, medibles.

La valoración de cada uno de los seis criterios de *idoneidad didáctica* se realizó por medio de la asignación de números para cada nivel de cumplimiento de los indicadores de cada componente: 0 para la ausencia del indicador, 0,5 cuando se tuvo una presencia parcial y 1 para su completo cumplimiento. A partir de tales datos se buscó generar valores porcentuales para cada criterio de idoneidad:

$$valor\ porcentual\ de\ la\ faceta\ de\ idoneidad = \frac{\sum_{i=1}^{n} valor\ de\ los\ indicadores}{\sum_{i=1}^{n} indicadores}$$

La valoración del nivel de cumplimiento de los indicadores correspondientes a cada uno de los componentes de los criterios de *idoneidad didáctica* se realizó por medio de la comparación del diseño de la tarea realizado por el profesor (Figura 3) y de las producciones de los alumnos (Figura 6).

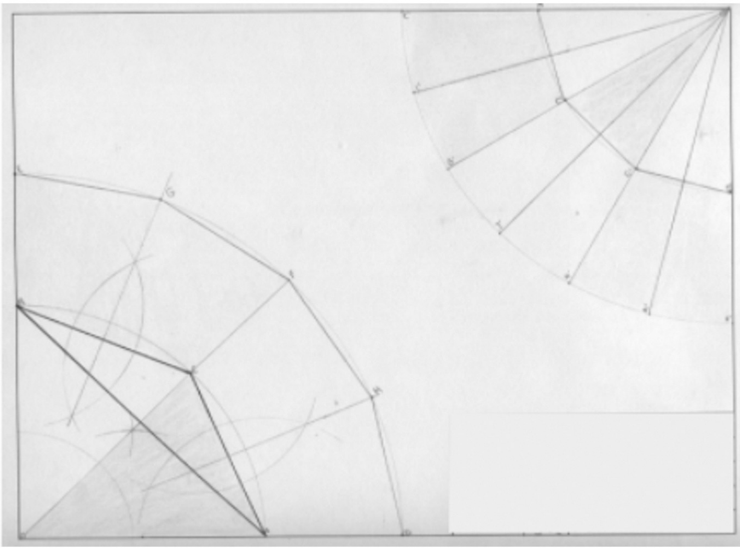


Figura 6. Muestra de la producción realizada por un alumno durante la Etapa 1

El contraste entre las instrucciones dadas para la elaboración del dibujo geométrico y la producción de los alumnos (Figura 6), se condujo siguiendo los indicadores de los componentes de cada uno de los criterios de *idoneidad didáctica*. Para valorar la *idoneidad epistémica*, por ejemplo, se utilizaron sus indicadores (Tabla 2). Así, identificamos que la tarea no presentaba una situación contextualizada, ni tenía relación alguna con un problema.

Cada criterio de *idoneidad didáctica* se concentró en una sola tabla, la cual fue utilizada como pauta de reflexión y de registro del análisis del diseño de la tarea y de los resultados de los alumnos. De manera que para cada etapa de la investigación se obtuvieron seis tablas de registro, una para cada criterio de *idoneidad didáctica* (Tabla 2). Al terminar la tercera etapa se contó con dieciocho tablas de registro.

Tabla 2. *Fragmento de la pauta de valoración de la idoneidad epistémica a partir de la identificación de los indicadores de sus componentes propuestos por Godino (2013) y Breda, Font y Pino-Fan (2018) para la Etapa 1*

Componente	Indicador	Valoración
Errores	**¿Se controla que no existan prácticas matemáticamente incorrectas?**	0
Ambigüedades	**¿Las definiciones se expresan con claridad y correctamente y se adecúan al nivel académico?**	0
	¿Los procedimientos se expresan con claridad y correctamente y se adecúan al nivel académico?	0,5
	¿Las explicaciones corresponden al nivel académico?	0
	¿Las comprobaciones corresponden al nivel académico?	0
	¿Está controlado el uso de metáforas?	0,5

La valoración de los indicadores de los componentes de los seis criterios de *idoneidad didáctica* se organizó en gráficos de barras. La elección de tales representaciones atendió al deseo de mantener visible el contraste entre el total de los indicadores de cada componente y los indicadores presentes por medio de palabras clave, a la vez que se asigna un código de color para agrupar los criterios. El gráfico que caracteriza la Etapa 1 (Figura 7) permite visualizar que la idoneidad interaccional ha sido la menos lograda, mientras que la idoneidad mediacional se ha visto privilegiada con esta tarea.

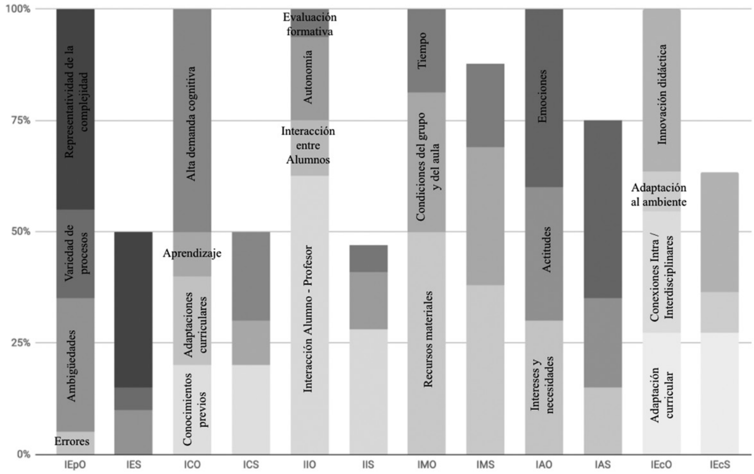


Figura 7. Gráfica comparativa de los indicadores de los componentes de *idoneidad didáctica* para la Etapa 1. Donde: IEpO = Idoneidad Epistémica Óptima, IES = Idoneidad Epistémica de la Secuencia, ICO = Idoneidad Cognitiva Óptima, ICS = Idoneidad Cognitiva de la Secuencia, IIO = Idoneidad Interaccional Óptima, IIS = Idoneidad Interaccional de la Secuencia, IMO = Idoneidad Mediacional Óptima, IMS = Idoneidad Mediacional de la Secuencia, IAO = Idoneidad Afectiva Óptima, IAS = Idoneidad Afectiva de la Secuencia, IEcO = Idoneidad Ecológica Óptima, IEcS = Idoneidad Ecológica de la Secuencia.

El análisis de la Etapa 2 se observa en la Figura 8, en este gráfico se observan las ventajas que ha aportado el rediseño de la tarea. La mayoría de los criterios se han visto beneficiados con la nueva propuesta, pero el criterio mediacional, que tuvo el mayor nivel de logro en la Etapa 1, se vio afectado.

La Etapa 3 se discute por medio del gráfico mostrado en la Figura 9. Dado que los indicadores de los criterios epistémico y cognitivo se ven superados, respecto a las etapas previas, se puede decir que mostraron el avance progresivo de nivel de logro que se esperaba en todas las idoneidades.

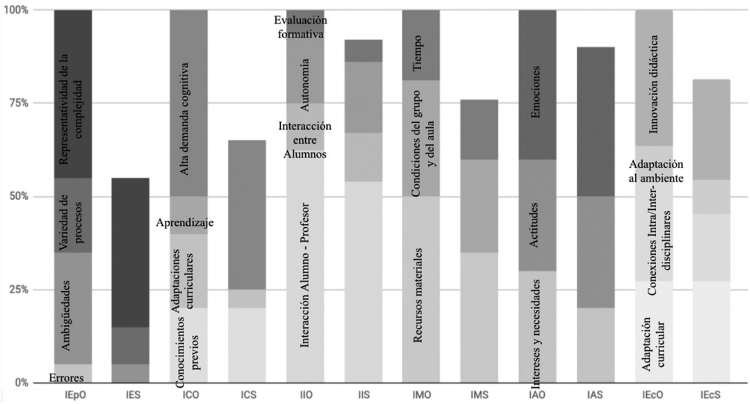


Figura 8. Gráfica comparativa de los indicadores de los componentes de *idoneidad didáctica* para la Etapa 2. Donde: IEpO = Idoneidad Epistémica Óptima, IES = Idoneidad Epistémica de la Secuencia, ICO = Idoneidad Cognitiva Óptima, ICS = Idoneidad Cognitiva de la Secuencia, IIO = Idoneidad Interaccional Óptima, IIS = Idoneidad Interaccional de la Secuencia, IMO = Idoneidad Mediacional Óptima, IMS = Idoneidad Mediacional de la Secuencia, IAO = Idoneidad Afectiva Óptima, IAS = Idoneidad Afectiva de la Secuencia, IEcO = Idoneidad Ecológica Óptima, IEcS = Idoneidad Ecológica de la Secuencia.

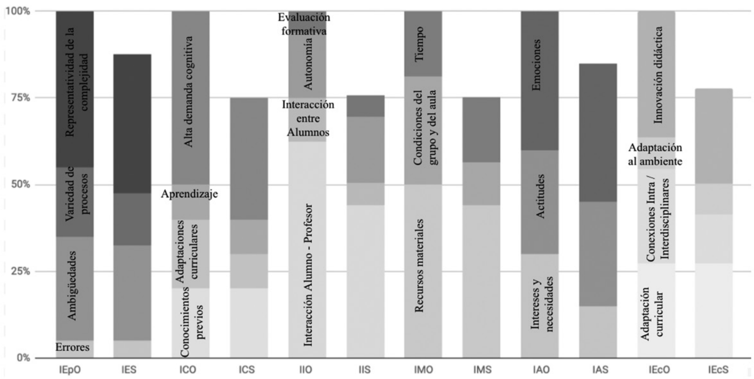


Figura 9. Gráfica comparativa de los indicadores de los componentes de *idoneidad didáctica* para la Etapa 3. Donde: IEpO = Idoneidad Epistémica Óptima, IES = Idoneidad Epistémica de la Secuencia, ICO = Idoneidad Cognitiva Óptima, ICS = Idoneidad Cognitiva de la Secuencia, IIO = Idoneidad Interaccional Óptima, IIS = Idoneidad Interaccional de la Secuencia, IMO = Idoneidad Mediacional Óptima, IMS = Idoneidad Mediacional de la Secuencia, IAO = Idoneidad Afectiva Óptima, IAS = Idoneidad Afectiva de la Secuencia, IEcO = Idoneidad Ecológica Óptima, IEcS = Idoneidad Ecológica de la Secuencia.

Los valores porcentuales de cada criterio se organizaron en un gráfico hexagonal (Figura 10) que nos remitiera a la representación esquemática presentada por Godino (2013). Este gráfico comparativo permitió observar el contraste entre los alcances de los indicadores de los componentes de los criterios de la *idoneidad didáctica*. En él se observa la evolución de los criterios de *idoneidad didáctica* según las nuevas propuestas de tareas. Se puede observar que el rediseño de una tarea tiene implicaciones en el nivel de logro de los criterios de *idoneidad didáctica*. En el caso de la *idoneidad epistémica* y la *idoneidad ecológica* se muestra un aumento progresivo en su nivel de logro. Por lo que corresponde a la *idoneidad cognitiva*, su nivel de logro solamente se superó en la tercera etapa de la investigación. A pesar de tener un retroceso en el nivel de logro de la *idoneidad afectiva* en la etapa 2, logró superarse en la tercera etapa. La *idoneidad interaccional* tuvo una acentuada mejoría, el bajo nivel de logro de la primera etapa fue ampliamente superado en el segundo ejercicio, aunque en el tercero no se logró mantener dicho grado de cumplimento. Un caso similar se tuvo con la *idoneidad afectiva*, la cual, después de un ligero retroceso, finalmente logró superar los niveles de logro de las etapas previas. El fenómeno menos deseado se tuvo con el criterio *interaccional*, el cual nunca logró superar el nivel alcanzado en el primer diseño, aún cuando logró un pequeño repunte en la tercera etapa.

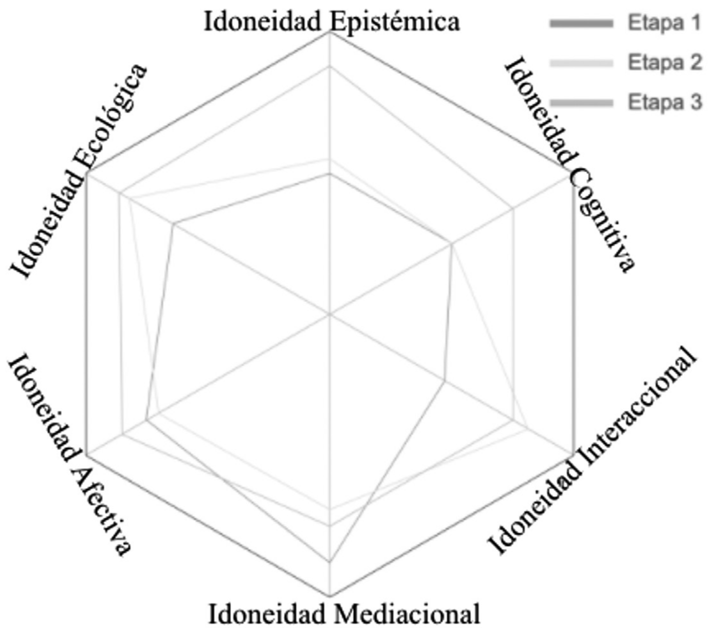


Figura 10. Gráfico comparativo de la *idoneidad didáctica* de las tareas de las tres etapas

4. Conclusión

El uso de procedimientos sistemáticos para el análisis de la práctica docente orienta en el diseño de secuencias didácticas que permitan mejores resultados al momento de su implementación en el aula. A través de la valoración de los seis criterios de *idoneidad didáctica*, el profesional puede responder a las preguntas propuestas por Font, Planas y Godino (2010): "¿qué ha ocurrido aquí y por qué?" y "¿qué se podría hacer para mejorar?". La primera pregunta la podemos responder detalladamente tomando como pauta los indicadores de los componentes de los criterios de la *idoneidad didáctica*. La segunda pregunta encuentra respuesta en los indicadores ausentes. De manera adicional, los autores consideramos pertinente aclarar que el uso de gamas diferentes de colores para cada criterio de idoneidad facilitó la comparación entre el caso óptimo y la situación dada en la secuencia. La falta de concordancia entre los colores de las barras de los gráficos de las figuras 7, 8 y 9 ayudó a visualizar los indicadores que no se cumplieron con la propuesta diseñada. Por otra parte, tenemos presente que en los casos en los cuales no sea posible presentar gráficos en color, el uso de escalas de grises y tramas diferentes serán las alternativas visuales útiles para esta tarea de comparación e identificación de identificadores. La misma observación puede extenderse, y aplicarse, al gráfico de la figura 10. En este último caso consideramos que no es relevante el uso de colores para distinguir las tres etapas del estudio.

A partir del objetivo planteado al inicio de este proyecto, se ha comprobado que la *idoneidad didáctica* ha sido un instrumento de suma ayuda en la identificación de los aspectos susceptibles de modificación para el rediseño de las secuencias didáctica analizadas. Además, se ha observado que la búsqueda del cumplimiento de un criterio puede afectar a otro (idoneidad mediacional), que las variaciones en el diseño de una tarea pueden no tener efecto en algún criterio (cognitiva) o que la propuesta final no logra superar en alguno de los aspectos a las propuestas previas (idoneidad interaccional).

Agradecimientos

Trabajo de investigación desarrollado en marco de proyectos de investigación de formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L.R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278. ISSN 1980-4415. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Brousseau, G. (Abril del 2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. *Seminario de Didáctica de las Matemáticas* llevado a cabo en la Universidad de Creta, Rethymnon, Grecia.

Clements, D.H., y Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. A. Grouwq (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp 420-464). Macmillan.

Fernández, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Erlbaum.

Font, V., Planas, N. y Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Godino, J.D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de Procesos de Instrucción Basado en el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Secretaría de Educación Pública (2011). *PROGRAMAS DE ESTUDIO 2011. GUÍA PARA EL MAESTRO. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. Secretaría de Educación Pública.

CAPÍTULO 7

CREACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS: UN ANÁLISIS MEDIANTE MAPAS HÍBRIDOS

CREATION OF OPTIMIZATION PROBLEMS BY UNIVERSITY STUDENTS: AN ANALYSIS USING HYBRID MAPS

Esmeralda Jasso Vázquez1, Eduardo Carlos Briceño Solis1, Nehemías Moreno Martínez2
esmeraldajassov@gmail.com, ecbs74@gmail.com, nehemias_moreno@live.com
[1] Universidad Autónoma de Zacatecas,
[2] Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Resumen

Se describe un avance de investigación que se realiza en un trabajo de tesis de maestría en Matemática Educativa, por parte de la autora principal de este documento, en la Universidad Autónoma de Zacatecas, México (UAZ). En este proyecto se pretende caracterizar el conocimiento matemático de los estudiantes universitarios de la Licenciatura en Actuaría de la UAZ cuando afrontan la tarea de crear/variar problemas matemáticos que involucran optimización. Para llevar a cabo nuestro propósito emplearemos algunas de las herramientas que propone el Enfoque Ontosemiótico (EOS), específicamente nos apoyaremos de la configuración de Objetos Mate-

máticos mediante la que analizaremos las producciones a través de la interpretación ontosemótica del Mapa Híbrido.
Palabras clave: *creación de problemas, mapas híbridos, optimización, enfoque ontosemiótico, procesos cognitivos.*

Abstract

A research progress is described, which is carried out in a master's thesis work in Educational Mathematics, by the main author of this document, at the Universidad Autónoma de Zacatecas (Autonomous University of Zacatecas), Mexico (UAZ). In this project we propose to analyze the construction of mathematical knowledge by some students of the Bachelor's Degree in Actuarial Sciences at the UAZ when they task of creating/varying mathematical problems involving optimization. To carry out our purpose, we will use some of the tools proposed by the Ontosemiotic Approach (EOS), specifically we will rely on the Configuration of Mathematical Objects through which we will analyze the productions generated through the ontosemiotic interpretation of the Hybrid Map.

Keywords: *problem posing, hybrid maps, optimization, onto-semiotic approach, cognitive processes.*

1. Antecedentes

Se han realizado diversas propuestas para mejorar el aprendizaje de la optimización en los estudiantes de nivel medio superior y superior (Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto, 2014; Rojas, Baez y Corona, 2017; Portillo, Ávila, Cruz y López, 2019), lo cual ha influido en las metodologías y estrategias de enseñanza-aprendizaje, que requieren de una mejora en la práctica docente e involucrar a los estudiantes en la construcción de su conocimiento. En el estudio de Baccelli et al. (2014), mencionan la problemática que se presenta en los estudiantes de nivel universitario al resolver problemas de optimización, evidencian que existen dificultades desde el planteamiento del problema hasta su desarrollo de resolución, los cuales son reflejados en los resultados obtenidos. Asimismo, en los curso de Cálculo Diferencial, es común encontrar que el tema de problemas de optimización esté asignado al final de los libros de texto, y en algunas ocasiones no se logra cubrir dichos temas y quienes logran hacerlo solamente resuelven mediante el método tradicional en el cual solo aplica prácticas algorítmicas y no incluyen otros métodos para la enseñanza de dicho contenido (Rojas et al., 2017).

En esta investigación se coincide con los anteriores autores respecto a la necesidad de mejorar la práctica docente en la enseñanza y aprendizaje de la optimización. Es por ello que se considera relevante el uso de la metodología para la Creación de Problemas. Se trata de problemas creados por los estudiantes en específico para la optimización en nivel superior, ya que la Creación de Problemas tiene gran potencialidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, porque contribuye a desarrollar el pensamiento matemático de quien los crea, así como ampliar su horizonte matemático y a iniciarlo en la investigación (Malaspina, 2013).

Con base en lo anterior, esta investigación se centra en que se han planteado muchos problemas convencionales de optimización mediante la resolución de problemas, y no se cuestiona acerca de alguna interpretación que se pudiese dar de esos resultados o de alguna dificultad que se pudiese presentar y se presta poca atención a que los estudiantes formulen sus propias preguntas del problema.

En las siguientes secciones se presenta algunos estudios de cómo se aborda la optimización en la matemática escolar con el fin de esclarecer qué es la optimización y los tipos de problemas de optimización que se estudian. Asimismo, se describe cómo es el tratamiento matemático de la optimización en los libros de texto de nivel universitario, se presentan y se discuten algunos estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial, esto con la finalidad de conocer lo que reportan algunos autores y cuáles son los resultados de dichas investigaciones; por último, se realiza un análisis bibliográfico sobre la Creación de Problemas, el cual es el eje central de este trabajo de investigación.

1.1. Estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial

En esta sección se describen algunas investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial. Estas fueron realizadas por los autores Fonseca, Casas, Bosch y Gascón (2009); Baccelli et al. (2014); Rojas et al. (2017); Malaspina (2007) y Malaspina y Font (2015).

En el estudio de Fonseca et al. (2009) se menciona que durante muchos años, en las instituciones educativas, los estudiantes al momento de abordar la modelización y las aplicaciones, lo hacen restringiéndose solamente a aplicar conocimientos matemáticos que han sido aprendidos en determinadas situaciones y que además, han sido presentados en contextos ficticios. Por otra parte, se considera que hoy en día este uso perdura en los sistemas de enseñanza. Asimismo, menciona que promover procesos de instrucción matemática donde se presenten situaciones problemas que requieran de experimentación, indagación, discusión por parte del estudiante, se genera un proceso de estudio con una cuestión generatriz la cual es dinámica y puede ser vivida por el estudiante, a partir de la cual, se genera una actividad matemática con nuevas cuestiones y respuestas, en donde el alumno está obligado a modificar la situación inicial, elaborar propias conclusiones y presentar resultados.

Por otro lado, Malaspina (2007) percibe que existen deficiencias de los estudiantes en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización propuestos ya que este problema, referente a las deficiencias en la argumentación, radica en la poca presencia de justificación.

Malaspina y Font (2015) mencionan que la intuición de la optimización está relacionada con los procesos cognitivos de la idealización, generalización y argumentación. Dicha intuición se desarrolla a través de dos tipos de experiencia, en donde, el primer tipo sucede cuando en la vida diaria las personas se enfrentan a la tarea de tomar decisiones óptimas, y el segundo de experiencia más personal. Es por este tipo de situaciones y experiencias que los estudiantes pueden entender problemas de optimización por lo que les permite responder intuitivamente a algunos problemas.

En el estudio de Baccelli et al. (2014), mencionan la problemática que se presenta en los estudiantes de nivel universitario al resolver problemas de optimización, evidencian que existen dificultades desde el planteamiento del problema hasta su desarrollo de resolución, los cuales son reflejados en los resultados obtenidos.

En los curso de Cálculo Diferencial, es común encontrar que el tema de problemas de optimización esté asignado al final de los libros de texto, y en algunas ocasiones no se logra cubrir dichos temas y quienes logran hacerlo solamente resuelven mediante el método tradicional en el cual solo aplica prácticas algorítmicas y no incluyen otros métodos para la enseñanza de dicho contenido (Rojas et al., 2017).

1.2. Tratamiento matemático de la optimización en libros de texto

En esta investigación se realizó una revisión de tres libros de texto (Stewart, 2012; Thomas, 2006; Purcell, 2007) utilizados en la enseñanza del Cálculo diferencial para el nivel medio superior y superior. Por cuestiones de espacio, solo se discutirá uno de ellos, cual es el libro de Stewart (2012).

El propósito del análisis de los libros es observar cómo presentan el tema de optimización en cada uno de ellos, analizar si el tratamiento del tema es similar, cuáles son las situaciones y ejercicios que se presentan, qué tipos de ejercicios de optimización que se presentan y si estos contribuyen a la reflexión didáctica en los alumnos, asimismo, se pretende observar si estos inducen a la argumentación, y observar si incluyen algunas variaciones en sus problemas aplicados.

En el libro de texto de Cálculo de una variable para nivel superior del autor Stewart (2012), se observa una introducción que motiva al lector a resolver problemas de optimización dado que presenta situaciones vinculadas a la vida cotidiana.

Asimismo, el texto hace énfasis en el desafío que presenta el problema expresado en palabras a un problema de optimización matemática en el que se debe establecer la función que se va a maximizar o minimizar. Posteriormente describe una serie de pasos que deben seguir los lectores para poder resolver un problema de optimización como se observa en la Figura 1.

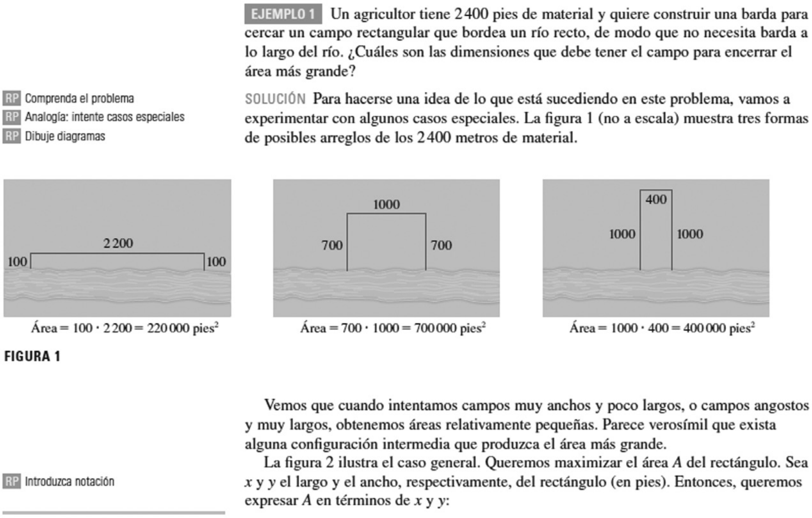
Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar las cantidades dadas y las cantidades requeridas en el diagrama.
3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada [vamos a llamarla Q (del inglés *quantity*) por ahora]. También seleccione símbolos ($a, b, c, \ldots, x, y$) para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes —p. ej., A para el área, h para la altura, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de *una* variable x, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Utilice los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para encontrar los valores máximo o mínimo *absolutos* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces puede utilizarse el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

Figura 1. Pasos para resolver un problema de optimización

Fuente: Stewart (2012, p. 325)

Después se presenta un listado de seis ejercicios resueltos sobre el tema de optimización donde cinco de los ejemplos era de tipo intramatemáticos en los cuales se presenta una representación pictórica que les ayuda a visualizar de una mejor manera el problema planteado. En algunos ejemplos se pide encontrar las dimensiones que debe tener un campo para encerrar el área más grande o para minimizar el costo de un metal como se muestra en la Figura 2. También se presenta un ejemplo aplicado a la economía en el que se pide encontrar una función demandada y una función de ingreso, así como encontrar un descuento el cual le permita maximizar sus ingresos. En dicho ejemplo no se presenta ninguna representación.



EJEMPLO 1 Un agricultor tiene 2 400 pies de material y quiere construir una barda para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita barda a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

RP Comprenda el problema
RP Analogía: intente casos especiales
RP Dibuje diagramas

SOLUCIÓN Para hacerse una idea de lo que está sucediendo en este problema, vamos a experimentar con algunos casos especiales. La figura 1 (no a escala) muestra tres formas de posibles arreglos de los 2 400 metros de material.

Área = 100 · 2 200 = 220 000 pies^2 Área = 700 · 1000 = 700 000 pies^2 Área = 1000 · 400 = 400 000 pies^2

FIGURA 1

Vemos que cuando intentamos campos muy anchos y poco largos, o campos angostos y muy largos, obtenemos áreas relativamente pequeñas. Parece verosímil que exista alguna configuración intermedia que produzca el área más grande.

RP Introduzca notación

La figura 2 ilustra el caso general. Queremos maximizar el área A del rectángulo. Sea x y y el largo y el ancho, respectivamente, del rectángulo (en pies). Entonces, queremos expresar A en términos de x y y:

Figura 2. Solución de un problema de optimización
Fuente: Stewart (2012, p. 326)

Por otra parte, aparece una explicación de una prueba o criterio de la primera derivada para saber cuándo un valor es el máximo absoluto de una función o el mínimo absoluto. Del mismo modo describen un método alternativo de resolución al problema propuesto, el cual consiste en utilizar la derivación implícita, como se muestra en la Figura 3.

NOTA 1 El argumento utilizado en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (que sólo se aplica a valores máximos o mínimos *locales*) y se establece aquí para referencia futura.

Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.

a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.
b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 Un método alternativo para resolver problemas de optimización es utilizar derivación implícita. Veamos el ejemplo 2 nuevamente para ilustrar el método. Trabajamos con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1000$$

pero en lugar de eliminar h, derivamos ambas ecuaciones implícitamente, respecto a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se produce en un número crítico, por lo que establecemos $A' = 0$; simplificamos para llegar a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y la sustracción da $2r - h = 0$, o $h = 2r$.

Figura 3. Prueba del máximo y mínimo absoluto
Fuente: Stewart (2012, p. 328)

Al final del tema se muestra un listado de ejercicios propuestos, los cuales son ejercicios similares a los ejemplos antes mencionados, como son el caso de los ejercicios del 14 al 19. En dichos ejercicios se presentan problemas para calcular las dimensiones de una caja que minimicen la cantidad de material, el costo mínimo de materiales para la elaboración de un recipiente. También se plantean ejercicios no contextualizados, como son los ejercicios del 2 al 6, en ellos se puede observar que los ejercicios propuestos hacen referencia a situaciones intramatemáticas en donde solamente se dan funciones para que a partir de ellas se obtenga la distancia mínima o máxima entre ellas.

Con base en el análisis realizado, se puede concluir que los ejercicios que se plantean en los libros de texto son ejercicios de tipo convencional. Este tipo de ejercicios son los que se encuentran en una clase regular y son estructurados en su planteamiento y cerrados en su solución y procedimientos.

Por otra parte, se pudo observar que en efecto, el tratamiento es similar en los tres libros de texto. En primera instancia, se presenta una serie de pasos específicos para resolver un problema, al inicio del capítulo, posteriormente muestran a manera de ejemplo, un ejercicio resuelto y finalmente, presentan una serie de ejercicios para que el lector los resuelva.

Asimismo, cuando se presentan los pasos para resolver un problema de optimización al inicio del capítulo, se puede observar que en primera instancia, sugieren leer y comprender el problema, posteriormente se propone que el lector dibuje un diagrama y así poder identificar las variables, a continuación indican introducir notaciones o ecuaciones y finalmente encontrar los puntos críticos y los extremos del dominio de la incógnita. Este es el orden de los pasos que se sugiere en los tres libros de texto.

2. Contexto de la problemática

Entre los factores que influyen y dificultan la comprensión de la optimización, se tiene que la enseñanza de la optimización se ajusta a los hábitos de enseñanza tradicional, es decir, prevalecen procesos mecánicos y algorítmicos, en donde usan mecánicamente los criterios de la primera y segunda derivada (Malaspina, 2007). Con gran frecuencia, se ha planteado problemas convencionales de optimización mediante la resolución de problemas y no se cuestiona acerca de alguna interpretación que se pudiese dar de esos resultados o de alguna dificultad que se pudiese presentar, asimismo, se presta poca atención a que los estudiantes formulen preguntas.

Como se ha señalado anteriormente, entre los factores que influyen en la obtención de los malos resultados que arrojan los estudiantes cuando resuelven un problema de optimización, se encuentran la falta de comprensión y una inadecuada organización del proceso de resolución del problema, por lo cual, se considera que una manera de ayudar a los alumnos a superar dichas dificultades es mediante el empleo de la metodología de Creación de Problemas por variación de Malaspina, (2017) que consiste en: (i) Información básica, (ii) Episodio en clase, (iii) Problemas Pre y Problemas Pos, (iv) Trabajos individuales y grupales sobre Creación de Problemas y (v) Socialización con todos los participantes.

Asimismo, como instrumento innovador, se propone analizar mediante los Mapas Híbridos la organización de los Objetos Matemáticos Primarios, los procesos cognitivos presentes, así como la relación de las prácticas y sus relaciones a lo largo del proceso de Creación del Problema por variación. Con base en lo anterior, en el contexto de la Creación de Problemas, se empleará la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido para analizar la construcción del conocimiento, por lo cual se plantea el objetivo general: Caracterizar la construcción de conocimiento referente a la optimización bajo la metodología de Creación de Problemas por variación para la identificación de los Objetos Matemáticos y sus conexiones, los procesos cognitivos implicados y las prácticas que intervienen.

3. Metodología

Si bien, inicialmente la investigación se planeó para ser implementada en el contexto de una clase presencial, sin embargo, la situación de la pandemia nos ha llevado a reformular nuestra investigación para llevar a cabo la Creación de Problemas por variación de manera virtual. La manera en que se implementaría sería mediante la plataforma virtual Zoom, empleando algunas de las herramientas que ofrece como son: compartir pantalla, herramientas de anotación y a partir de ello obtener las producciones orales y escritas mediante las videograbaciones.

En el diseño de la investigación se considera por un lado, la metodología de enseñanza de la Creación de Problemas por variación de Malaspina (2017), la cual será implementada mediante la plataforma Zoom.

Por otra parte, también se toma en cuenta el contexto de los estudiantes con los cuales se realizó el estudio, es decir nos interesa también indagar los conocimientos previos y los que fueron construidos una vez que se empleó la Creación de Problemas. Por esto, se considera las cuatro fases de la metodología de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) las cuales son: fase preliminar, fase de análisis a priori, fase de experimentación y fase de análisis posteriori.

En la Figura 4 se presenta a grandes rasgos el diseño de la investigación. En primera instancia, y en la columna central, se muestran las cuatro fases de la metodología de la ingeniería Didáctica, la cual se empleará en esta investigación. Las cuatro fases son: Fase 1. Análisis preliminar; Fase 2. Concepción y análisis a priori; Fase 3. Experimentación; y Fase 4. Análisis a posteriori y validación. Asimismo, en algunas de las fases de la Ingeniería Didáctica se incluyen las etapas de la metodología de Creación de Problemas.

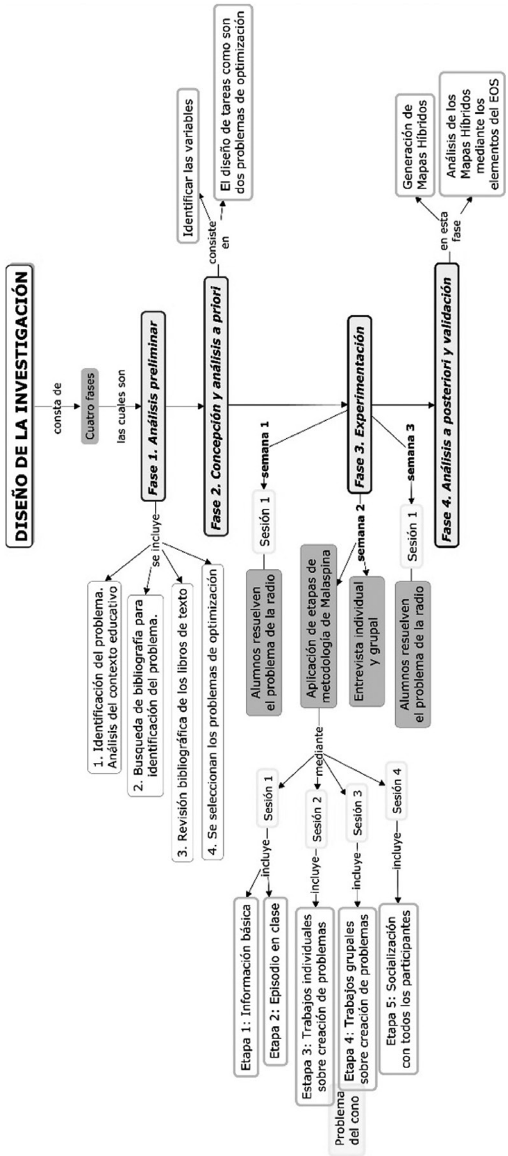


Figura 4. Diseño de investigación

Fuente: Elaboración propia

En la Fase 1. Análisis preliminar, se incluyen los siguientes aspectos: Identificación del problema, análisis del contexto educativo, búsqueda de bibliografía para identificar cómo abordar el problema, revisión bibliográfica de libros de texto y se selecciona los problemas de optimización.

En la Fase 2. Concepción y análisis a priori, se identifican las variables, el investigador selecciona dos problemas de optimización de tipo no convencional. En esta fase se considera el Episodio 1: Información básica, de la metodología de la Creación de Problemas. Dicho episodio se refiere a una presentación en donde se explica a los estudiantes sobre lo que significa creación de problemas, qué es la Creación de Problemas, qué elementos tiene un problema, y sobre todo, que se puede crear un problema, a partir de un problema dado modificando uno o más de los elementos presentes en el problema

La Fase 3. Experimentación, considera la resolución de un problema de optimización de tipo no convencional, por parte de los estudiantes. Asimismo, se aplican las etapas restantes de la metodología de Creación de Problemas y se realiza una entrevista. Las etapas de la metodología que aquí se abordan son: Etapa 2. Episodio en clase, en donde el profesor les presenta a los estudiantes un problema ya elaborado. Se les explica en qué consiste el problema y a partir de esto, se hacen algunas anotaciones sobre cómo reaccionan los alumnos de acuerdo con el problema presentado. Asimismo, se aborda la Etapa 2. Problemas Pre y Problemas Pos, en donde el docente les pide a los alumnos que resuelvan el problema presentado anteriormente. Después se les pide a los estudiantes que propongan problemas modificando el problema dado, para que de esta manera su solución facilite la solución del problema dado y contribuya a clarificar las dudas de los estudiantes al resolver dicho problema o al intentar resolverlo, a estos nuevos problemas se les denomina *Problema Pre*. Finalmente, se les pide crear el *Problemas* *pos*, en donde se les pide a los estudiantes que propongan problemas modificando el problema dado, pero que estos nuevos problemas sean más retadores, de modo que desafíen a los estudiantes más allá de la obtención de una solución correcta del problema del episodio.

Del mismo modo, se aborda la Etapa 4. Trabajos individuales y grupales sobre Creación de Problemas. Una vez que los estudiantes hayan realizado de manera individual sus Problemas pre y Problemas pos, deben de realizar lo mismo en grupos de dos o tres participantes. Una vez creado el problema por un grupo debe ser resuelto por el grupo autor y luego por otro grupo. El otro grupo debe resolver el problema planteado por el grupo autor conociendo sólo el enunciado de dicho problema. Los grupos deben escribir críticas constructivas al problema creado por otro grupo.

Por último se aborda la Etapa 5. Socialización con todos los participantes. Los participantes comparten con todos, en exposiciones breves, las razones didácticas y matemáticas tras el problema creado, ya sea en forma individual o grupal. También exponen el problema resuelto por un grupo, que no es el grupo autor de tal problema, expone su solución y hace sus comentarios críticos desde el punto de vista matemático y didáctico.

Finalmente, en la Fase 4. Análisis a posteriori y validación, con base en las producciones orales y escritas, se generan Mapas Híbridos para posteriormente realizar un análisis de dichos Mapas con algunos elementos del EOS.

4. Análisis, discusión y propuesta

En esta investigación se propone analizar la construcción de conocimiento matemático mediante la Creación de Problemas a través de la técnica del Mapa Híbrido (MH) desde algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), a partir de una perspectiva gráfica de los Objetos Matemáticos Primarios, sus conexiones, y los procesos cognitivos que se ponen en juego al abordar la Creación de Problemas a partir de uno dado, también llamado variación del problema. De manera concreta, se pretende abordar la Creación de Problemas de optimización.

Mediante un estudio cualitativo, de caso, se pretende analizar la producción oral y escrita generada por algunos estudiantes de la Licenciatura en Actuaría de la Universidad Autónoma de Zacatecas, cuando se enfrentan a la tarea de crear problemas matemáticos por el método de variación que involucran a la optimización. La interpretación ontosemiótica de la técnica del Mapa Híbrido permite describir el sistema de prácticas presentes en la resolución de situaciones problematizadas de la matemática que se estudian en el aula, asimismo permite visualizar los distintos Objetos Matemáticos, las relaciones entre dichos objetos, la organización de las prácticas y permite advertir la realización de algunos procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas.

Se plantea entonces que la interpretación ontosemiótica de la técnica del Mapa Híbrido podría mostrar las prácticas implicadas, los Objetos Matemáticos que intervienen en dichas prácticas, las conexiones que se establecen entre los objetos de una misma práctica y entre objetos pertenecientes a distintas prácticas, y también poder advertir la realización de los procesos cognitivos implicados en la construcción del conocimiento matemático relacionado con la actividad de Creación de Problemas por variación.

Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, México, por el apoyo otorgado a través de la beca de Maestría a la becaria 1000497.

Referencias

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En R. D. Michèle Artigue, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Baccelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S., y Prieto, G. (2014). Problemas de optimización: un análisis en la construcción de significados. *Actas Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.* Obtenido de www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1119.pdf

Fonseca, C., Casas, J., Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM.* Santander.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(3), 365-399.

Malaspina, U. (2013). Creación y resolución de problemas para el aprendizaje de Matemáticas. En *Actas VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, *35*(2), 331-336.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Malaspina, U. y Font, V. (2015). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 107–130.

Portillo, H., Ávila, M., Cruz, M. y López, C. (2019). Geogebra y Problemas de Optimización. *Cultura Científica y Tecnológica, 16*(15), 5-11.

Purcell, E.J. (2007). Cálculo diferencial e Integral. En *Cálculo Aplicaciones de la derivada* (pp. 167-178). México: Pearson Educación.

Rojas, L., Báez, J., y Corona, M. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, 9*(3), 52 – 63.

Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable Trascendentes tempranas. En *Cálculo Aplicaciones de la derivada problemas de optimización* (pp. 325-338). México: Cengage Learning.

Thomas, G.B. (2006). Cálculo de una variable. En *Cálculo Problemas de optimización aplicados* (pp. 278-292). México: Pearson Educación.

CAPÍTULO 8

SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA EN EL DÉCIMO GRADO

DIDACTIC SITUATIONS FOR THE STUDY OF TRIGONOMETRY IN THE TENTH GRADE

Seydel Bueno García[1], Yanet Martínez Reguera[2],
Julio Mora Salvador[1]
seydel.bueno@reduc.edu.cu, yamare@nauta.cu,
julio.mora@reduc.edu.cu
[1]Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte Loynaz", [2]IPU "Rafael Guerras Vives"

Resumen

Se presenta el diseño de situaciones didácticas, que tienen el propósito presentar el tratamiento didáctico de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas matemáticos del tema de trigonometría, en el décimo grado. Este diseño permite fundamentar la construcción de los objetos matemáticos de la trigonometría para potenciar la idoneidad, la reflexión y el uso de ordenadores en el desempeño de nuestros docentes y estudiantes. Las concepciones sobre la formación didáctico-matemática, integrada desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, los cambios de registros de representación semiótica, contextualizado en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática posibilitaron el análisis epistémico y la obtención de

criterios que favorecen el diseño de situaciones didácticas para la resolución problemas.
Palabras claves: *situación didáctica, procesos matemáticos, identidad trigonométrica.*

Abstract

The design of didactic situations is presented, which have the purpose of presenting the didactic treatment of mathematical objects and processes involved in solving mathematical problems on the subject of trigonometry, in the tenth grade. This design allows to base the construction of the mathematical objects of trigonometry to enhance the suitability, reflection and use of computers in the performance of our teachers and students. The conceptions about the didactic-mathematical training, integrated from the ontosemiotic approach, the changes of records of semiotic representation, contextualized in the teaching and learning of Mathematics made possible the epistemic analysis and the obtaining of criteria that favor the design of didactic situations for problem solving.
Keywords*: didactic situation, mathematical processes, identity.*

1. Introducción

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática se enmarca actualmente en el perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación en Cuba. Los resultados que se alcanzan en la apropiación de los contenidos que se imparten en el décimo grado del nivel Medio Superior, no son los esperados, y por tal motivo, se requiere encontrar acciones que mejoren los resultados en el desempeño de los docentes y estudiantes. El Proyecto de Investigación, "Introducción y Generalización de los resultados investigativos del grupo de Matemática Educativa de la Universidad de Camagüey y la valoración de sus impactos en el territorio", se propone elevar la calidad de la integración de los componentes del trabajo científico-docente, mediante la realización de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática que contribuyan al desarrollo de la educación en el país (Academia de Ciencias de Cuba, 2019).

Con vista al logro de los objetivos de enseñanza y la consecuente elevación del interés hacia el aprendizaje de la Matemática, se propone en el nuevo perfeccionamiento de la asignatura Matemática para el nivel Medio Superior, plantear el estudio de los nuevos contenidos matemáticos en función de resolver nuevas clases de problemas, de modo que la resolución de problemas no sea sólo un medio para fijar, sino también para adquirir nuevos conocimientos, sobre la base de un concepto amplio de problema (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

En este enfoque se reconoce que el proceso de resolución de un problema es una actividad importante para la construcción de los objetos y procesos matemáticos, sin embargo, el desarrollo de procesos de estudios aún no alcanza la articulación idónea en el aprendizaje de los objetos matemáticos. Los autores Font (2008); Rincón, Montes de Oca y Mola (2017); Rincón (2018); Montes de Oca (2020); Godino, Burgos y Wilhelmi (2020) han señalado la necesidad e insuficiencias que existe en la adquisición de objetos, significados y procesos en la resolución de problemas de Geometría Plana.

En este nivel escolar se consolidan a través de la solución de problemas de trigonometría: el cálculo con cantidades de magnitudes, la obtención de fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras planas y cuerpos geométricos, la resolución de triángulos rectángulos y cualesquiera, la demostración de teoremas, donde intervienen objetos y procesos de la actividad matemática que se apoyan fundamentalmente en el uso del concepto de razón (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática la utilización del término situación va dirigido al planteamiento de un problema donde es desconocida la vía de solución, sin embargo, cuando se quiere mejorar los resultados en la apropiación de los contenidos y someterlos a una valoración dentro de la enseñanza, estamos abarcando el campo de una situación didáctica. En el presente trabajo nos apoyamos a lo que refiere Montes de Oca (2020) como una situación didáctica, tomando en cuenta que es la forma de presentar el contenido a partir del tratamiento didáctico de los objetos y procesos matemáticos, como núcleo fundamental que mejora la actividad matemática en los docentes y los estudiantes.

Presentamos situaciones didácticas que abordan situaciones-problemas de la trigonometría desde la deducción de relaciones (vistas como identidades trigonométricas [ID]) y su generalización, así como, sus representaciones como procesos de la resolución de problemas. Estas situaciones se sustentan en aspectos teóricos sobre la formación didáctico-matemática (Montes de Oca, 2020), el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino y Batanero, 1994) y (Godino et al., 2017) y la teoría sobre la representación semiótica para la construcción del conocimiento matemático (Duval, 2006).

2. Aspectos de la enseñanza y el desarrollo de la trigonometría en el contexto escolar

El estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, ha pasado por diferentes momentos que se diferencian entre sí, dado la aplicación de sus contenidos en el resto de las disciplinas que conforma el contenido matemático, enfatizando en menor medida en la forma que comprenden y se deducen en nuestros estudiantes los contenidos de la trigonometría. En la enseñanza de la trigonometría se observa la tendencia de los docentes a centrar el uso de los valores notables y el nulo uso de calculadoras y asistentes matemáticos (Martínez, 2012), cuestión que en el aprendizaje se comporta de manera similar. Entre las deficiencias de la enseñanza de la trigonometría, se encuentra que el estudio de las ID se realiza de una manera mecánica utilizando procedimientos que enmascaran la esencia de un proceso de deducción, representación y de generalización de una relación trigonométrica.

La palabra trigonometría se deriva de dos palabras griegas: trigonon (triángulo) y metría (medición). La trigonometría reúne en una sola teoría dos tipos muy diferentes de aplicaciones, por un lado, para estudiar las relaciones numéricas entre los lados y los ángulos de los triángulos y, por otro lado, para analizar los problemas relativos a los hechos periódicos Dorce (2019).

El tratamiento de los contenidos en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría se fundamenta desde la línea directriz: Formular y resolver problemas (Ballester et al., 2015), donde esta temática se vincula a la resolución de ejercicios y problemas, pues brinda amplias posibilidades para continuar enseñando a resolver problemas, donde el estudiante se enfrenta a variados ejercicios con carácter de problemas, estableciendo relaciones y dependencias entre lo dado y buscado, buscando analogías con otros problemas ya resueltos, variando ciertas condiciones dadas en lo dado, construyendo esquemas, tablas, diagramas y además auto controlando el resultado obtenido.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en Cuba se ha visto influenciado por diferentes perfeccionamientos, desde los cuales se dieron orientaciones teóricas-metodológicas para el trabajo con los contenidos de la trigonometría. Las principales orientaciones que permitieron su tratamiento para el desarrollo de habilidades en ejercicios y problemas, se dirigen a la memorización y aplicación del cálculo, definiciones y relaciones fundamentales de la trigonometría, sin lograr una adecuada comprensión y generalización de los objetos de este tema.

Las ID y la generalización del concepto de ángulo son parte del sistema de relaciones que se estudian dentro de este tema. Haciendo un uso ampliado del concepto de ID, podemos incluir no solo relaciones que se expresan como ecuaciones que se satisfacen para el valor de la variable que admite, sino también, relaciones conceptuales que se representan mediante igualdades de razones, como es el caso de las razones de ángulos que no son agudos y dependen a la vez de estos ángulos agudos, por ejemplo sen α=sen (180^0-α), donde α es mayor que 0º y menor que 90º.

3. La formación didáctico-matemática, el EOS y la representación semiótica

La formación didáctico-matemática es una concepción dirigida a transformar el desempeño de los docentes desde la práctica pedagógica, debido a las necesidades de aprendizaje que presentan los estudiantes en su formación integral Montes de Oca (2020). Entre los fundamentos de esta concepción se encuentran; el (EOS) Godino

(2009) y la teoría sobre las representaciones semióticas sobre los objetos matemáticos (Duval, 2006); a través de su articulación desde lo más general en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

El EOS asume la noción de práctica matemática como un lugar central. Se considera práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Dado que un objeto matemático, en su versión institucional se concibe como un "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas" (p. 335), el significado de un objeto queda determinado por el "sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 338).

Para el diseño y valoración de la actividad matemática mediante el desarrollo de situaciones se utilizan como objetos los definidos por (Godino et al., 2017, p. 3):

Situaciones-problema	**Aplicaciones intra-matemáticas o extra-matemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática.**
Lenguajes	**Términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros (gestual, oral, escrito).**
Conceptos	**Entidades matemáticas que se introducen mediante descripción o definición.**
Proposiciones	**Propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos.**
Procedimientos	**Técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.**
Argumentos	**Enunciados requeridos para justificar o demostrar las proposiciones o explicar los procedimientos.**

Los objetos matemáticos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas se relacionan entre sí. Así, las situaciones-problemas son la razón de ser de la actividad matemática; el lenguaje constituye el instrumento de trabajo matemático y representa las demás entidades; los argumentos fundamentan los procedimientos y las proposiciones que relacionan los conceptos matemáticos entre sí. El reconocimiento de la trama de objetos interrelacionados que interviene en dichas prácticas ayuda a comprender y gestionar los procesos de estudio matemáticos, así como tomar conciencia de la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática como factor explicativo de las dificultades en dichos procesos.

Se toma en consideración la implicación de las representaciones semióticas en la realización de actividades matemáticas (Duval, 2006), y su influencia en el mejoramiento del desempeño de los estudiantes en el dominio de los objetos matemático en su aprendizaje. Se tiene en cuenta la mediación de la tecnología para facilitar la dirección del proceso de aprendizaje de los objetos, prácticas y procesos (Almonte y García, 2016). Por el interés de desarrollar la resolución de problemas a través del estudio de los procesos de deducción de relaciones y de representaciones matemáticas, con vista a valorar las transformaciones que se tienen en el aprendizaje, asumimos la categoría de situación didáctica-matemática, definida como:

> ¨formas de presentación del contenido y un recurso metodológico que coadyuva a una participación activa, reflexiva, responsable y crítica de los estudiantes y docentes, pues posibilitan prestar atención a los requerimientos que constituyen el núcleo fundamental de cada uno de los campos de acción del docente en el tratamiento didáctico de los objetos y procesos matemáticos, con especial atención a los relacionados con la comunicación que se lleva a cabo en el contexto del aula, el trabajo con los diferentes registros de representación semiótica y la utilización del lenguaje matemático, entre otros¨ (Montes de Oca, 2020, p.276).

Las situaciones didácticas nos permiten diseñar un conjunto de situaciones matemáticas que comparten dentro de la actividad de resolución de problemas el trabajo con los objetos y procesos matemáticos. De aquí podemos definir los objetos y procesos esenciales que facilitan una apropiación reflexiva e idónea de los contenidos matemáticos.

Una situación didáctica propone una manera de organizar el trabajo del docente y de los alumnos a propósito de un saber matemático pretendido, que se considera idónea en términos del aprendizaje de los alumnos. Una situación matemática incluye un problema al cual se le atribuye un significado pretendido y personal, el cual comparte la distinción entre ejercicio, situación-problema y pensar matemáticamente (Noda, 2001), esto genera el reconocimiento de los objetos y procesos desde una enseñanza que se caracteriza por ser reflexiva e idónea para la apropiación de los conocimientos en los estudiantes. Para Brousseau (1997), en la situación didáctica el docente y el estudiante establecen reglas y acciones implícitas, cuya finalidad es que la situación didáctica que se proponga permita explicar y articular los diferentes objetos, prácticas, procesos, etc. que se presentan al estudiante al solucionar problemas. El término de proceso lo interpretamos como una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada) (Font y Rubio, 2017). Por lo que precisamos de manera general, que en la situación didáctica se concibe como principales componentes el objetivo, las acciones integradas a las prácticas, los objetos, las tareas (problemas) y los medios que apoyan la enseñanza y el aprendizaje.

4. Procesos de deducción y representación de proposiciones matemáticas

Este trabajo está estrechamente vinculado a la deducción de proposiciones o relaciones matemáticas y su representación como procesos matemáticos, que pueden ser desarrollados en los docentes a través de situaciones didácticas, que impactan en el aprendizaje de los estudiantes. Específicamente relacionado con la deducción lógica y la representación semiótica de ID y la generalización del concepto de ángulo, mediante la realización de ejercicios (problemas o situaciones-problemas) que parten de identificar como núcleo conceptual una relación matemática que propicia el tratamiento de los objetos matemáticos a través de los procesos mencionados. En el nivel preuniversitario el trabajo con la deducción de algunos teoremas se basa fundamentalmente en la evaluación de conceptos básicos de la teoría, además de, sistematizar reglas de inferencia para la demostración de teoremas. La deducción y la inducción matemática en este nivel deben potenciar: el estudio eficiente de los procesos matemáticos que se tratan, la racionalidad del trabajo mental y el uso de los recursos heurísticos para la búsqueda de la solución de un problema Álvarez, Almeida y Villegas (2014).

En nuestro caso, proponemos que la deducción se realice a partir de proposiciones conocidas para obtener una nueva proposición cuya veracidad está asegurada. En esta vía lógica del conocimiento la obtención y el aseguramiento transcurren simultáneamente. Las orientaciones metodológicas que se dan actualmente proponen que, para deducir un concepto o llegar a la demostración de una proposición se requiere de la evaluación de los conceptos básicos de la trigonometría. Para el desarrollo de la deducción y la representación de relaciones matemáticas, agregamos que la deducción también se puede tratar a partir de introducir conceptos y procedimientos apoyados en nuevas formas de representación semiótica, que garantizan la generalización de conceptos y de las proposiciones matemáticas.

En el caso específico de las ID, enfatizamos en la demostración mediante la introducción del concepto de razón entre segmentos, apoyado en registros semióticos de tipo aritmético, algebraico y trigonométrico, y no solamente en la evaluación desordenada de expresiones matemáticas. Las principales representaciones del concepto de razón que se representan y que deben de articular en la conversión de registros semióticos, durante la tarea que se proponga son los que aparecen en la figura 1.

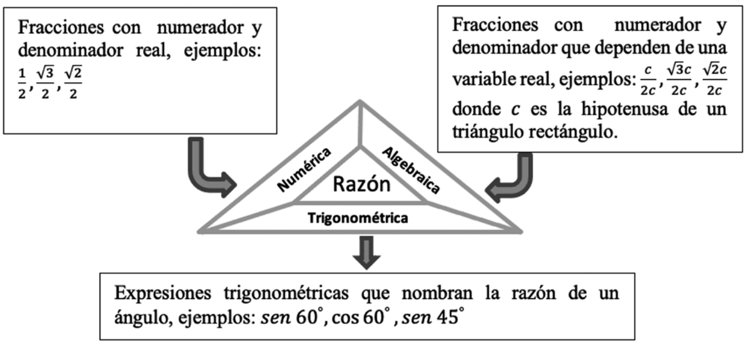


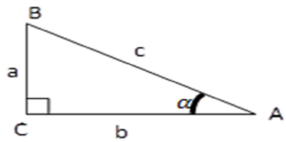
Figura 1. Conceptos que se representan en la deducción de las identidades trigonométricas

De este análisis se desprende que la deducción y representación de proposiciones matemáticas van acompañando el desarrollo de la actividad matemática. Se trata de procesos que cuando se enfocan desde relaciones matemáticas, proporcionan la reflexión, la interpretación y la comprensión sobre el aprendizaje de los objetos matemáticos. De manera general el diseño de la situación didáctica lo presentamos a partir de los componentes: objetivo, situación-problema, acciones y la solución del problema manifestando los objetos y procesos de estudio.

4.1. Situación didáctica

El objetivo de esta situación es la obtención de las ID. Se parte inicialmente de conocer las relaciones que se cumplen en un triángulo rectángulo, tales como, el teorema de Pitágoras y luego a partir de aquí realizar transformaciones sobre estas relaciones que nos lleven a obtener las ID. Las acciones siguientes serán desarrolladas por los docentes para lograr que los alumnos a partir de relaciones en el triángulo rectángulo deduzcan las ID.

Ejercicio: Dado el triángulo ABC, rectángulo en C, cuyos lados son: a, b y c. $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$



a. Establece todas las posibles razones entre los lados del triángulo. Relaciónalas con las razones trigonométricas del ángulo α.

$$\text{Sen } \propto = \frac{a}{c}, \cos \propto = \frac{b}{c}, \tan \propto = \frac{a}{b}, \cot \propto = \frac{b}{a}, \csc \propto = \frac{c}{a} \sec \propto = \frac{c}{b}$$

b. Plantea la relación que establece el teorema de Pitágoras y transfórmala en una relación que contenga razones entre los lados del triángulo ABC.

Representación y tratamiento del registro algebraico del concepto de razón			
$a^2 + b^2 = c^2$	$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ (Dividiendo por c^2 en ambos miembros)	$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)^2}$ (Dividiendo por b^2 en ambos miembros y hallando recíproco)	$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{a}{c}\right)^2}$ (Dividiendo por a^2 en ambos miembros y hallando recíproco)

c. Si $\alpha = 30^\circ$, comprueba que se cumple las identidades obtenidas.

Representación y tratamiento del registro aritmético del concepto de razón		
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$	$1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

d. Representa cada relación obtenida en el inciso anterior en función de una razón trigonométrica.

Representación y tratamiento del registro trigonométrico del concepto de razón		
$\text{sen}^2 30^o + \cos^2 30^o = 1$	$\tan^2 30^o + 1 = \frac{1}{\cos^2 30^o}$	$1 + \cot^2 30^o = \frac{1}{\text{sen}^2 30^o}$

e. Generaliza las relaciones trigonométricas anteriores que se forman para todo ángulo cuyas medidas están entre 0º y 90º.

Representación y tratamiento del registro trigonométrico del concepto de razón		
$\text{sen}\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$	$\tan^2 \propto +1 = \frac{1}{\cos^2 \propto}$	$1 + \cot^2 \propto = \frac{1}{\text{sen}^2 \propto}$

Para lograr una deducción más certera de las ID y su comprensión, esta actividad puede realizarse para los valores de y de los lados del triángulo dados en la tabla siguiente.

α	*a*	*b*	*c*
45°	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	*2*
60°	$\sqrt{3}$	*1*	*2*
$36,9^\circ$	*3*	*4*	*5*
$22,6^\circ$	*5*	*12*	*13*

La situación anterior permitió entre los docentes el análisis de los objetos y los procesos matemáticos que abordamos en el tratamiento didáctico de las ID. Describiéndolos como:

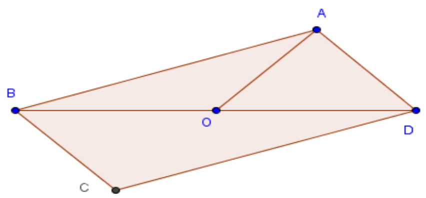
Situaciones-problema	**Identificar razones trigonométricas, introducir razones de longitudes de segmentos a partir del teorema de Pitágoras, comprobar relaciones, deducir y generalizar ID.**
Lenguajes	**Razón entre segmentos, razón algebraica, razones numéricas a través de tablas y razón trigonométrica, relación y proposición matemática, identidad, representación gráfica.**
Conceptos	**Triángulo rectángulo, razón matemática y relación.**

Proposiciones	**Teorema de Pitágoras, transformaciones sobre una ecuación algebraica.**
Procedimientos	**Cálculo con fracciones y evaluaciones de expresiones algebraicas.**
Argumentos	**Las operaciones (multiplicación, división, potenciación) que se realizan sobre el teorema de Pitágoras permiten introducir razones entre segmentos que generalizan la obtención de ID.**

4.2 Situación didáctica

El objetivo de esta situación es presentar a los docentes que imparten el décimo grado, el tratamiento didáctico que inicia la generalización del concepto de ángulo cuya medida no está solo en el rango de $(0° < \alpha < 90°)$, a partir del concepto de razón trigonométrica. Esta situación se trata con el uso del Geogebra, para mostrar a los docentes como pueden emplear de forma dinámica las relaciones que tratan sobre ID. Las acciones siguientes serán desarrolladas por los docentes para lograr que los alumnos relacionen el seno de un ángulo agudo (o del primer cuadrante) con la razón de un ángulo cuya medida está en el intervalo [90°,180°].

Ejercicio: ABCD es un paralelogramo, BD es una diagonal y O es su punto medio, demuestre que el área del triángulo AOD es igual al área del triángulo AOB utilizando un argumento trigonométrico.



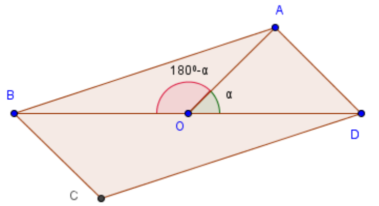
a. Plantea una fórmula para el cálculo del área del triángulo AOD, utilizando como argumento trigonométrico el ángulo AOD como el ángulo α. $A = \frac{\overline{AO}.\overline{OD}}{2} sen(\alpha)$

b. Establezca una relación entre las áreas de los triángulos AOD y el triángulo AOB, utilizando el anterior argumento trigonométrico en los ángulos AOD y AOB.

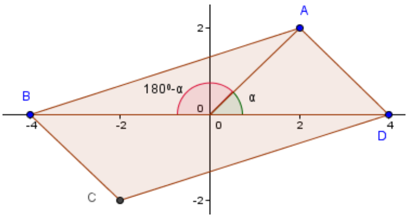
$$\frac{\overline{AO}.\overline{OD}}{2}sen(\alpha) = \frac{\overline{AO}.\overline{BO}}{2}sen(180^{\circ} - \alpha)$$

c. Relacione los elementos que deben ser iguales en ambas fórmulas para probar que las áreas son iguales. ($\overline{OD} = \overline{BO}$, por ser 0 punto medio de la diagonal, sen (α) = sen (180º – α))

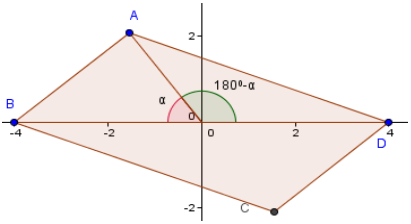
d. Muestre con el uso del Geogebra la relación que existe entre el sen α y sen (180º – α). Para esta acción, se necesita definir la razón trigonométrica de un ángulo obtuso como aparece en una de las gráficas y saber con el Geogebra: construir y marcar ángulos, hallar componentes de un punto, calcular cocientes y raíces, entre otras operaciones.



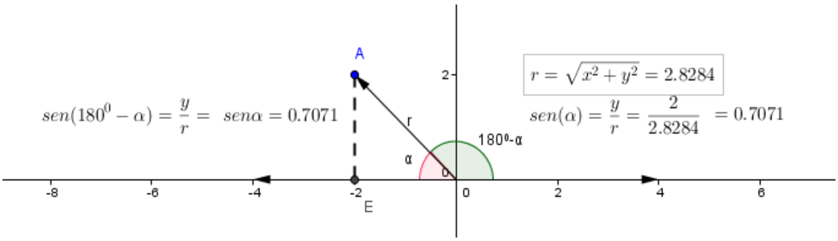
(representación del problema)



(representación sobre el sistema de ejes de coordenadas)



(representación de la transportación de α al segundo cuadrante)



(representación de la obtención del valor de la razón de un ángulo obtuso)

Para lograr una deducción de las razones trigonométricas de ángulos que no son solo agudos, la comparación a través de la ubicación del ángulo agudo del primer cuadrante hacia el resto de los cuadrantes, usando el geogebra, favorece la comprensión, la representación y la generalización, de estos procesos sobre concepto de ángulo. Esta idea nos permite plantear una tercera situación didáctica que permite deducir y relacionar las razones trigonométricas para ángulos cualesquiera que están en el intervalo. La situación anterior permitió entre los docentes describir los objetos matemáticos siguientes:

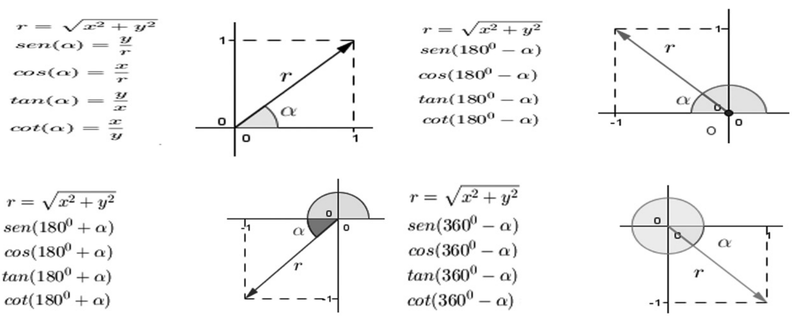
Situaciones-problema	**Establecer relaciones entre áreas y razones trigonométricas.**
Lenguajes	**Área de un triángulo, razón trigonométrica, seno de ángulos agudos y obtusos. Movimiento de un ángulo agudo. Relación entre áreas, sistema de ejes de coordenadas, componentes de un punto, distancia entre puntos, y todo lo relacionado con un triángulo usando el Geogebra.**
Conceptos	**Paralelogramo, área de un triángulo, ángulo agudo y obtuso, relación matemática.**
Proposiciones	**Fórmulas de áreas de triángulos y relación entre áreas de un triángulo empleando la trigonometría. Igualdad de elementos.**
Procedimientos	**Cálculo de razones de ángulos agudos y obtusos con el uso del Geogebra. Comparación de razones trigonométricas de ángulos agudos y obtusos.**
Argumentos	**Se requiere comparar la igualdad de las áreas en diferentes representaciones para comparar sus elementos. Se utiliza el Geogebra para generalizar la igualdad de razones entre un ángulo agudo y otro obtuso.**

4.3 Situación didáctica

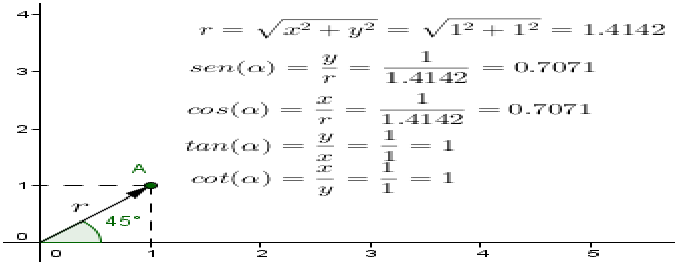
El objetivo de esta situación es generalizar las razones trigonométricas de un ángulo cuya medida está entre y , a partir de, relaciones que se forman con las razones de un ángulo agudo. Para esta situación se necesita utilizar los procedimientos anteriores sobre cálculo de razones y generalizarlos a través del cálculo, al ubicar el ángulo agudo en cualquier cuadrante para relacionarlo con un ángulo cuya medida está entre 180° y 360°. Las acciones siguientes serán desarrolladas por los docentes para lograr que los alumnos relacionen la razón de un ángulo agudo con un ángulo cuya medida está en el intervalo [90° y 360°].

Ejercicio: Obtenga los valores del seno, coseno, tangente y cotangente de un ángulo sobre el intervalo .

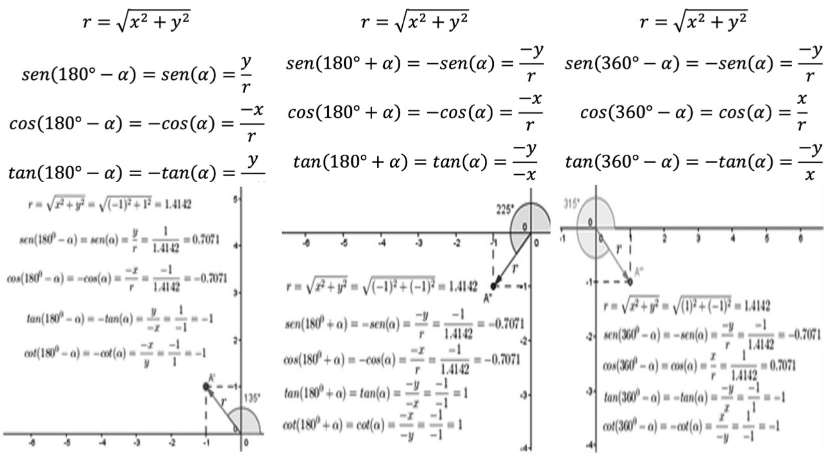
a. Identifica la razón trigonométrica en cada cuadrante.



b. Halla el seno, coseno, tangente y cotangente del ángulo α tal que 0° < α < 90°.



c. Defina el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de un ángulo del segundo, tercer y cuarto cuadrante, teniendo en cuenta que $x > 0$ y $y > 0$.



La situación anterior permitió entre los docentes que imparten la trigonometría en el décimo grado describir los objetos matemáticos siguientes:

Situaciones-problema	Deducir y generalizar razones trigonométricas.
Lenguajes	Razón trigonométrica. Cuadrante, ángulo axial. Sistema de ejes de coordenadas. Numero racional e irracional (detallando que el asistente matemático muestra una aproximación del valor de los elementos del triángulo rectángulo). Geogebra e Identidad trigonométrica.

Conceptos	**Razón, ángulo nulo, agudo, obtuso, sobre obtuso, axial y el de ángulo completo. Fórmula de reducción.**
Proposiciones	**Igualdad de razones, relación e identidad trigonométrica.**
Procedimientos	**Cálculo de razones de ángulos que están en el intervalo con el uso del Geogebra. Comparación de razones trigonométricas.**
Argumentos	**Se compara mediante una relación de razones trigonométricas utilizando el Geogebra para la generalización del cálculo de razones trigonométricas.**

Después de presentadas y analizadas con los docentes estas situaciones didácticas, es posible proponer como criterio que cuando se articulan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría los diferentes tipos de representaciones propuestas y mostradas anteriormente del concepto de razón, es posible mejorar sustancialmente el aprendizaje de los objetos matemáticos y el desarrollo de los procesos matemáticos. Además de esto, con este diseño de situaciones didácticas se muestra la implementación de los procesos de deducción de relaciones, representación y generalización matemática que facilitan la resolución de problemas en la trigonometría, donde el rol de la tecnología es importante para dinamizar el papel de las representaciones matemáticas.

5. Reflexiones finales

En la preparación metodológica que se desarrolló en el Preuniversitario "Alvaro Morell" del municipio Camagüey con los docentes que imparten el décimo grado en este municipio, se trataron las situaciones didácticas aquí presentadas. En esta actividad participaron 14 docentes, que deben poner en práctica los objetos, las prácticas y procesos que aquí se trataron. Los docentes manifestaron la importancia de tratar los objetos y procesos matemáticos al nivel que se presentan, desde el enfoque del EOS, pues alegan que son elementos activos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que los docentes deben tener en cuenta. Además, consideran que el uso de los asistentes matemáticos facilita la profundización del conocimiento de los objetos y procesos de la actividad matemática.

El aporte práctico de los resultados del presente trabajo se expresa en un nuevo diseño del tratamiento didáctico de la obtención de proposiciones matemáticas, tomando como un núcleo conceptual la identificación de relaciones matemáticas, que permiten deducir y representar el tratamiento de los objetos matemáticos desde la concepción de una situación didáctica que concibe el uso adecuado de los asistentes matemáticos.

Este trabajo nos brinda la posibilidad de integrar la perspectiva histórico–cultural del desarrollo humano, con el EOS y los cambios de registros de representación semiótica, desde la concepción de la formación didáctico-matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Con el desarrollo de situaciones didácticas y el núcleo conceptual que presentamos, se obtienen nociones básicas para la generalización del concepto de ángulo, que contienen nuevos problemas que articulan los procesos de estudios de deducción y representación de relaciones matemáticos.

Referencias

Academia de Ciencias de Cuba. (2019). *Libro de Dictámenes de Premios Nacionales a los resultados de la investigación científica*. Pleno de la Academia de Ciencias de Cuba de marzo 2019.

Almonte, R.M. y García, J. (2016). Panorama de la integración de la tecnología de la información y la comunicación (TIC) en el proceso enseñan aprendizaje en la República Dominicana. *Revista IPLAC*, No.1.

Álvarez, M, Almeida, B. y Villegas, E. (2014). El proceso de enseñanza de la Matemática. Documentos metodológicos. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.

Ballester, S., García, J. E., Almeida, B., Álvarez, M., Rodríguez, M., González, R., Villegas, E., Fonseca, A. y Puig, N. (2015). *Didáctica de la Matemática*. Tomo I. Universidad de Ciencias Pedagógica de Cuba.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Dorce, C. (2019). Evaluación del impacto que tiene la implementación de actividades relacionadas con la historia de las matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado. *Educación Matemática 31*(3), 237-262.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Font, V. (2008). Enseñanza de las matemáticas. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Ed.), *Actas del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 21-62). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Font, V., y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. In *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-21).

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Docente de Matemáticas. España: *Revista Iberoamericana de educación matemática. Unión*, (20): 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. *Actas Del Segundo Congreso International Virtual Sobre El Enfoque Ontosemiótico Del Conocimiento y La Instrucción Matemáticos.*, 1-13.

Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencia*s, *38*(1), 147-164.

Martínez, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *RELIME 15*(1), 35-62.

Montes de Oca, N. (2020). La Formación Didáctico-Matemática de Docentes: resultados teóricos. *Revista Paradigma (Edición Cuadragésimo Aniversario:1980-2020) XLI*. 271-288.

Noda, M. A. (2001). Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos de primer ciclo de la ESO y maestros en formación. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de La Laguna España.

Rincón, E. (2018). *El desarrollo de la comprensión de los objetos de la geometría plana en los estudiantes de la carrera de educación, mención Matemática.* (Tesis doctoral). Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz.

Rincón, E., Montes de Oca, N. y Mola, C. (2017). Estrategia para la comprensión de los objetos de la Geometría Plana en la carrera de Educación mención Matemática. *Didasc@lia: Didáctica y Educación. VIII*(4), 179-189.

CAPÍTULO 9

NUEVA MIRADA PARA ANALIZAR LAS CONEXIONES DESDE DOS LENTES TEÓRICOS: LA TEORÍA AMPLIADA DE LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS Y EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

NEW VIEW FOR ANALYZING CONNECTIONS FROM TWO THEORETICAL LENSES: THE EXTENDED THEORY OF MATHEMATICAL CONNECTIONS AND THE ONTO-SEMIOTIC APPROACH

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto[1]; Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez[1]; Vicenç Font Moll[2]
crodriguez@uagro.mx, flor.rodriguez@uagro.mx, vfont@ub.edu
[1]Universidad Autónoma de Guerrero, México; [2]Universidad de Barcelona, España.

Resumen

Se presenta el avance de tesis doctoral que tiene como objetivo hacer un networking de teorías entre la Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas (TAC) y el Enfoque Ontosemiótico (EOS), que consideran importante la noción de conexión. La literatura reporta que en el análisis de las conexiones no se presentan explícitamente los objetos matemáticos que se conectan y los estudiantes y algunos profesores tienen dificultades para conectar significados y múltiples representaciones de la derivada. Dado que se presentan ambigüedades para analizar los datos con la teoría de conexiones, en los

resultados se muestra una síntesis de la ampliación de la teoría de conexiones (TAC), el networking de teorías y un ejemplo de análisis con un episodio sobre la derivada como contexto de reflexión. Se concluye que, una conexión está constituida por un conglomerado de prácticas, objetos, procesos y funciones semióticas.
Palabras clave: *articulación de teorías, conexiones matemáticas, enfoque ontosemiótico, derivada.*

Abstract

The advance of the doctoral thesis is presented that aims to networking of theories between the Extended Theory of Mathematical Connections (ETC) and the Onto-semiotic Approach (OSA), which consider the notion of connection important. In the literature, it is reported that in the analysis of the connections the mathematical objects that are connected are not explicitly presented and that students and some teachers have difficulties in connecting meanings and multiple representations of the derivative. Given that there are ambiguities to analyze the data with the theory of connections, the results show a synthesis of the extension of the theory of connections (TAC), the networking of theories and an example of analysis with an episode on the derivative as context of reflection. It is concluded that a connection is constituted by a conglomeration of practices, objects, processes and semiotic functions.
Keywords: *networking of theories, mathematical connections, onto-semiotic approach, derivative.*

1. Introducción y Antecedentes

La investigación en Educación Matemática y los currículos internacionales centrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, consideran que las conexiones matemáticas son fundamentales para que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos, usen significados, diferentes representaciones y trabajen las matemáticas vinculadas con la vida real (Association of Mathematics Teacher Educators [AMTE], 2017; García-García y Dolores-Flores, 2019; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez y Font, 2020).

Las conexiones matemáticas se han investigado desde distintos niveles educativos, por ejemplo, en educación primaria, Kenedi et al. (2019) sostienen que, hacer conexiones permite que el aprendizaje de las matemáticas sea más significativo y contribuye al desarrollo de la resolución de problemas. En el nivel preuniversitario y universitario han enfatizado en conceptos como la derivada y la integral (García-García y Dolores-Flores, 2018; 2019; Rodríguez-Nieto *et al.*, 2020; Rodríguez-Nieto, Font, Borji y Rodríguez-Vásquez, 2021). Otros estudios se han enfocado en los profesores de matemáticas para estudiar la calidad de las conexiones (Mhlolo, 2012), las conexiones sobre la derivada (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2020), entre otros.

1.1. Contexto de la problemática de investigación

Particularmente, los estudios sobre la derivada se han desarrollado desde distintos marcos teóricos, por ejemplo, con la teoría APOE (Fuentealba *et al.*, 2019). Con el EOS como referente teórico, Pino-Fan, Godino y Font (2015) mencionan que los futuros profesores presentan dificultades para conectar significados parciales de la derivada, y, por otra parte, Sari, Hadiyan y Antari (2018) evidenciaron que los estudiantes tienen dificultades para conectar múltiples representaciones de la derivada. Asimismo, Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez y García-García (2021) reportaron las conexiones matemáticas que hacen futuros profesores en la resolución de problemas sobre la derivada y mostraron que uno de los futuros profesores tiene un significado equivocado sobre la derivada, lo cual le llevó a no hacer conexiones entre representaciones diferentes y a proceder inadecuadamente para resolver un problema.

También, la derivada se ha investigado por medio de redes teóricas "networking of theories", por ejemplo, mediante un networking entre la teoría APOE y el EOS, Font, Trigueros, Badillo y Rubio (2016) conceptualizaron la noción del objeto derivada, realizaron una descomposición genética con el APOE y luego hicieron un análisis de la actividad matemática usando herramientas del EOS. Posteriormente, Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez (2018) usaron la APOE y EOS de manera combinada para estudiar la comprensión de la derivada en un contexto gráfico. Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval (2017) articularon la teoría de representaciones semióticas y el EOS, haciendo énfasis en la derivada y las representaciones. Asimismo, en Rodríguez-Nieto et al. (2020) se muestra la ampliación de la teoría de las conexiones matemáticas cuando la articularon con la teoría de la metáfora conceptual, donde emergió la categoría de conexión metafórica.

Otras investigaciones centradas en la aplicación de redes de marcos teóricos a otros conceptos matemáticos resaltan la importancia de este tipo de estudios (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013; Tabach, Rasmussen, Dreyfus y Apkarian, 2020), porque el trabajo en red de teorías no solo enfatiza la teoría y el trabajo con teorías de diferentes perspectivas, también es "un enfoque metodológico para la investigación teórica y empírica que conecta diferentes teorías para ampliar y profundizar la comprensión de los problemas" (Kidron y Bikner-Ahsbahs, 2015, p. 221). Cabe destacar que, las articulaciones de teorías se hacen respetando los principios conceptuales y metodológicos de cada teoría, comparándolas, contrastándolas e integrándolas (Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008). Considerando la importancia que tienen las conexiones matemáticas y el trabajo en red de teorías, se reconoce que para la TAC y el EOS la noción de conexión es importante, y con base en ambos marcos teóricos se ha estudiado la derivada. En esta línea, es pertinente investigar sobre conexiones con estas dos teorías de manera integrada para favorecer a un análisis más detallado de las conexiones. Por lo tanto, en este estudio se muestra el avance de tesis doctoral que trata de la articulación de las teorías TAC y EOS para el análisis de las conexiones matemáticas a través de un networking of theories publicado (un avance de los resultados de dicha tesis se hallan Rodríguez-Nieto *et al.*, 2021).

2. Marco Teórico

En este apartado se presenta la conceptualización de la conexión matemática, la tipología de conexiones matemáticas contempladas en la TAC y algunas herramientas teóricas del EOS.

2.1. Las conexiones matemáticas en Educación Matemática

En el campo de la Educación Matemática, diversos autores han conceptualizado el término conexión matemática, por ejemplo, Brown (1983) aseguró que las conexiones matemáticas "son una relación o asociación causal o lógica, una interdependencia" (p. 481). También, para Businskas (2008) son entendidas como "una relación verdadera entre dos ideas matemáticas A y B" (p. 18). Estas definiciones tienen similitudes a las usadas en los currículos internacionales (AMTE, 2017; NCTM, 2000) cuando se refieren que las conexiones son estándar de proceso que permite relacionar conceptos, significados, representaciones, así como vincular las matemáticas con la vida real. Particularmente, en esta investigación entendemos una conexión matemática como "un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real" (García-García y Dolores-Flores, 2018, p. 229). Además, las conexiones matemáticas se categorizan en dos grandes grupos: intramatemáticas y extramatemáticas. Por su parte, las conexiones extramatemáticas se dan cuando "se relaciona un concepto o modelo matemático con un problema en contexto o de aplicación o, viceversa. Incluyen las conexiones entre contenidos matemáticos con otras disciplinas curriculares y con situaciones de la vida diaria" (Dolores-Flores y García-García, 2017). Mientras que, las intramatemáticas "se establecen entre ideas, conceptos, procedimientos, teoremas, representaciones y significados matemáticos entre sí" (Dolores-Flores y García-García, 2017). En este trabajo consideramos las conexiones intramatemáticas que se describen a continuación:

1. *Representaciones diferentes*: son identificadas cuando el sujeto representa los objetos matemáticos usando representaciones equivalentes y alternas (Businskas, 2008). Las *equivalentes* son transformaciones de representaciones de un mismo registro, por ejemplo, $P(x) = 6x^2 + 4x$ es equivalente a $P(x) = 2x(3x + 2)$. Las representaciones *alternas* se refieren a representaciones de un mismo objeto donde se cambia el registro en el cual fueron formadas (por ejemplo, gráfica-algebraica) (Businskas, 2008).

2. *Procedimental*: se identifican cuando un sujeto usa reglas, algoritmos o fórmulas para o resolver una tarea matemática. Este tipo de conexión son de la forma: A es un procedimiento para trabajar con un concepto B (García-García y Dolores-Flores, 2019). Por ejemplo, usar la fórmula $\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$

para hallar la derivada de un producto de dos funciones.

3. *Parte-todo*: se presenta cuando las relaciones lógicas se establecen en las dos formas siguientes: a) La relación de generalización es de la forma A y es una generalización de B y B es un caso particular de A (Businskas, 2008; García-García y Dolores-Flores, 2019); b) La relación de inclusión viene dada cuando un concepto matemático está contenido en otro. Por ejemplo, los irracionales están contenidos en los reales.

4. *Implicación*: se identifican cuando un concepto A conduce a otro concepto B por medio de una relación lógica (A B) (Businskas, 2008). Por ejemplo, si ″(c)<0, entonces tiene un valor máximo relativo en c.

5. *Característica*: se identifica cuando la persona expresa algunas características de los conceptos o describe sus propiedades en términos de otros conceptos que lo hacen diferentes o similar a los otros (García-García y Dolores-Flores, 2019). Por ejemplo, $(x)= ax^n$ tiene un coeficiente (a), una literal (x) y un exponente (n).

6. *6) Reversibilidad*: se presentan cuando un sujeto empieza desde un concepto A para obtener un concepto B e invertir el proceso, empezando desde B hasta retornar a A (García-García y Dolores-Flores, 2019). Por ejemplo, cuando se reconoce la relación bidireccional entre derivada e integral como operaciones inversas y cuando se utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo como una forma de vincular ambos conceptos (García-García y Dolores-Flores, 2018).

7. *Significado*: se identifica cuando un sujeto "atribuye un sentido a un concepto matemático, es decir, lo que significa para él [...]. Incluye aquellos casos en los que un estudiante da una definición que él o ella ha construido para estos conceptos" (García-García y Dolores-Flores, 2019). Por ejemplo, la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Además, García-García y Dolores-Flores (2018) afirman que, "las conexiones matemáticas surgen cuando los estudiantes resuelven tareas específicas y pueden identificarlas en sus producciones escritas o en los argumentos orales o mímicos que desarrollan" (p. 229).

2.2. Enfoque Ontosemiótico

Es un sistema teórico inclusivo sobre el conocimiento y la instrucción matemática, motivado por la necesidad de clarificar, articular y mejorar nociones teóricas y metodológicas de diferentes marcos teóricos. Además, surge para tratar de dar respuesta a cuestiones fundamentales para la Educación Matemática, por ejemplo: *¿Qué es un objeto matemático?*; o bien, *¿Cuál es el significado de un objeto matemático*? (Godino y Batanero, 1994).

En el EOS es fundamental describir la actividad matemática desde una perspectiva institucional o personal, la cual se modela en términos de prácticas y de configuración de objetos primarios y procesos que son activados en dichas prácticas (Font, Godino y Gallardo, 2013); donde, la práctica matemática es entendida como "toda situación o expresión (verbal, gráfica, simbólica) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p.334). También, se tienen en cuenta seis objetos (situaciones problemas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos), a los cuales se les denomina objetos primarios y conectados entre sí forman la configuración de objetos primarios (Godino, Batanero y Font, 2019). Desde la perspectiva de Font, Godino y Gallardo (2013) el "objeto" se usa en un sentido amplio para referirse a cualquier entidad que, de alguna manera, está involucrada en la práctica matemática y puede identificarse como una unidad.

Por otra parte, una configuración es un conjunto o sistema heterogéneo de objetos relacionados entre sí. La configuración de objetos puede ser institucional (epistémica) o personal (cognitiva) (Godino *et al*., 2019). Los objetos primarios que participan en la práctica pueden hacerlo de diferentes maneras (manera de estar), las cuales son el resultado de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos primarios; los cual permite hablar de objetos primarios personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, intensivos o extensivos y de contenido o expresión. La configuración epistémica es el sistema de objetos primarios que, desde una perspectiva institucional están involucrados en las prácticas matemáticas llevadas a cabo para resolver un problema específico y la configuración cognitiva es el sistema de objetos matemáticos primarios que un sujeto moviliza como parte de las prácticas matemáticas desarrollas para resolver un problema específico (Godino *et al*., 2019). El conjunto de objetos primarios emerge en la actividad matemática a través de la activación de procesos matemáticos primarios (comunicación, planteamiento de problemas, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmos, rutinas, ...) y argumentación) derivados de la aplicación de la perspectiva proceso-producto a dichos objetos primarios, estos precisos se dan juntamente con los derivados de aplicar la dualidad proceso producto a las cinco dualidades comentadas anteriormente (institucional/personal, expresión/contenido, ostensivo/no ostensivo, unitario/sistémico y extensivo/intensivo): personalización-institucionalización; síntesis-análisis; representación-significado; materialización-idealización; generalización-particularización (Font *et al.*, 2013; Font *et al.*, 2016; Godino *et al.*, 2007). La resolución de problemas y el modelado matemático deben considerarse más bien como "hiperprocesos" matemáticos que combinan algunos de los procesos acabados de comentar (Godino *et al.*, 2007).

Otro componente importante en el EOS es la noción de función semiótica que permite asociar las prácticas con los objetos y procesos que se activan y admite construir una noción operativa del conocimiento, significado, comprensión y competencia (Godino *et al.*, 2007). Una función semiótica es una relación triádica entre un antecedente (expresión/objeto inicial) y un consecuente (contenido/objeto final) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia (Font, 2007). Las funciones semióticas se infieren cuando se mira la actividad matemática desde la dualidad expresión/contenido.

3. Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativa (Cohen, Manion y Morrison, 2018), desarrollada en dos etapas: Primero, se presenta una síntesis del primer resultado del avance de la *tesis doctoral* donde se recolectaron los datos a partir de la observación participante a un profesor de Cálculo Diferencial. En la segunda etapa, se desarrolló un networking of theories con base en las investigaciones de Drijvers et al. (2013), Kidron y Bikner-Ahsbahs (2015), Prediger, Bikner-Ahsbahs ay Arzarello (2008) y Radford (2008).

4. Análisis y Resultados

Los resultados se dividen en dos partes: primero se presenta la ampliación de la teoría de las conexiones matemáticas (TAC) y luego, se muestra una síntesis de un networking de teorías entre la TAC y el EOS.

4.1. Primer resultado: Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas (TAC)

Bajo un enfoque cualitativo en Rodríguez-Nieto et al. (2020) se reportó un estudio sobre las conexiones matemáticas que hace un profesor cuando enseña la derivada, el cual fue desarrollado en tres fases: 1) la recolección de datos por medio de la observación no participante (Cohen Manion y Morrison, 2018) donde se videograbaron ocho clases sobre la derivada, cuyos participantes fueron un profesor de Cálculo Diferencial y sus estudiantes de la carrera de licenciatura en matemáticas de una universidad del estado de Guerrero, México. Posteriormente, 2) se llevaron a cabo dos análisis, *uno* basado en la identificación de las conexiones matemáticas con base las categorías contempladas en el modelo de Businskas (2008), las aportaciones de García-García y Dolores-Flores (2018) y la implementación de las seis etapas de análisis temático (familiarización con los datos, generación de códigos iniciales, búsqueda de temas y subtemas, revisión de temas —se toman a priori de las categorías de conexiones—, nombramiento de temas y temas ambiguos, y, el reporte con nuevos temas) sugerido por Braun y Clarke (2006). En el reporte se presentan las conexiones matemáticas (significado, representaciones diferentes, procedimental, parte-todo, implicación, instrucción y característica) establecidas por el profesor (ver ejemplos en la Tabla 1).

Tabla 1. *Conexiones matemáticas sobre la derivada establecidas por el profesor.*

	Código o frase (C)	Subtema	Tema: Conexión matemática
C1	Luego forme el cociente incremental, muévase a la situación límite y, si el límite existe como un número real, entonces este límite será la derivada de la función, y, lo representa: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	Significados de la derivada.	Significado
C2	La pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.		
C3	Consideremos esto en un gráfico, un pedazo de gráfica (hace la gráfica en la pizarra).	Representaciones sobre la derivada.	Representaciones diferentes
C4	Escribe la representación simbólica correspondiente a la función graficada.		
C5	Hizo la representación simbólica del límite del cociente incremental $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ y la conectó con otra representación simbólica ′(x).		
C6	Usó la fórmula de la derivada de una potencia (xn)' = nxn^{-1}.	Uso de fórmulas o reglas para resolver problemas.	Procedimental
C7	El profesor coloca un ejemplo: "determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y= x^2 + 2$, en el punto (2,6)" En este sentido, el profesor está usando un caso particular ($y = x^2 + 2$) de la función cuadrática general ($y = ax^2 + bx+c$).	Relaciones entre casos particulares y generales entre conceptos matemáticos.	Parte-todo
C8	Si se conoce el comportamiento de la recta tangente, también se conoce el comportamiento de la curva.	Relaciones lógicas entre conceptos.	Implicación
C11	Si existe el límite de una función, es único.	Características de la función continua.	Característica
C12	Analizamos la continuidad, podemos recorrer (movernos) a través de ella sin levantar el lápiz del papel.		

Nota. Esta información se presenta ampliamente en Rodríguez-Nieto et al. (2021).

En Rodríguez-Nieto et al. (2020) se sugiere usar el esquema de conexión de la Figura 1. Por ejemplo, cuando el profesor hace conexiones de significado de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto y como el límite del cociente incremental, se evidencia la conexión entre el término derivada y el significado mediante un código (C).

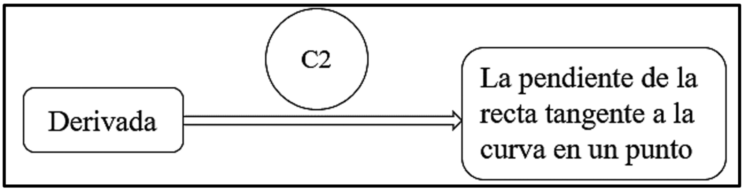


Figura 1. Esquema de conexión matemática de significado

El *segundo análisis* surge porque específicamente en la cuarta fase del análisis temático se realizó una triangulación de los códigos y los temas, es decir, se revisaron los temas con un investigador experto en las conexiones matemáticas, cuyo referente teórico sobre las las conexiones era el modelo sugerido por García-García y Dolores-Flores (2018). El investigador experto encontró algunas inconsistencias con algunas conexiones identificadas y éstas fueron reubicadas considerando su opinión. Por ejemplo, el profesor experto mencionó que la conexión de implicación identificada por los autores de la investigación en el extracto asociado al C12 "*sí una función tiene un límite, su límite es único; por lo tanto, si una función tiene una derivada, su derivada es única*", debe ser considerada como una conexión de tipo característica.

Además, los autores de la investigación identificaron una conexión de tipo características en el siguiente extracto "*esta curva, tal como está, ¿creen que tiene derivada? Puede tener, bajo ciertas restricciones, a diferencia de las otras, cuando analizamos la continuidad, podemos recorrer (movernos) a través de ella sin levantar el lápiz del papel*", coincidiendo con la opinión del profesor experto. Sin embargo, el profesor no reconoció que en este extracto hay frases donde se pueden identificar otros tipos de conexiones. Cabe destacar que, una frase o código puede sugerir varios tipos de conexiones simultáneamente (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2020), lo cual genera ambigüedades al momento de identificar las conexiones con algunas categorías descritas en la teoría, por ejemplo, la de característica. En este sentido, en C12 de la Tabla 1 se mencionan frases como *"analizamos la continuidad, podemos recorrer (movernos) a través de ella sin levantar el lápiz del papel"* la cual es una expresión metafórica que sugiere la metáfora conceptual: la gráfica es un camino (Lakoff y Núñez, 2000) que este caso es de tipo *Grounding*. Por lo tanto, en este tipo de expresiones se pueden reconocer conexiones metafóricas como un nuevo tipo de conexión, entendida como "la proyección de propiedades, características, etc., pertenecientes a un dominio conocido para estructurar otro dominio menos conocido (abstracto). Por ejemplo, cuando el profesor o alumno utiliza expresiones verbales o escritas como *podemos recorrer (movernos) a través de ella (curva) sin levantar el lápiz del papel* que implícitamente sugieren la metáfora conceptual "la gráfica es un camino" (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2020), ver en la Figura 2 el esquema de conexión metafórica.

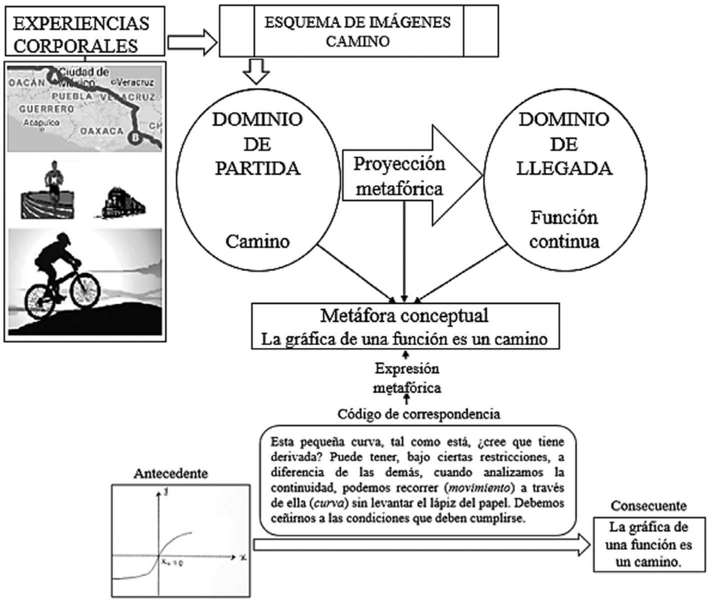


Figura 2. Esquema de la conexión metafórica
Fuente: Rodríguez-Nieto et al. (2020)

Con la conexión metafórica se amplía el modelo de conexiones de Businskas (2008), seguido por García-García y Dolores-Flores (2018; 2019), es decir, se genera una nueva Teoría de Ampliada de las Conexiones Matemáticas (TAC) como ampliación de las anteriores (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2020), ver Figura 3.

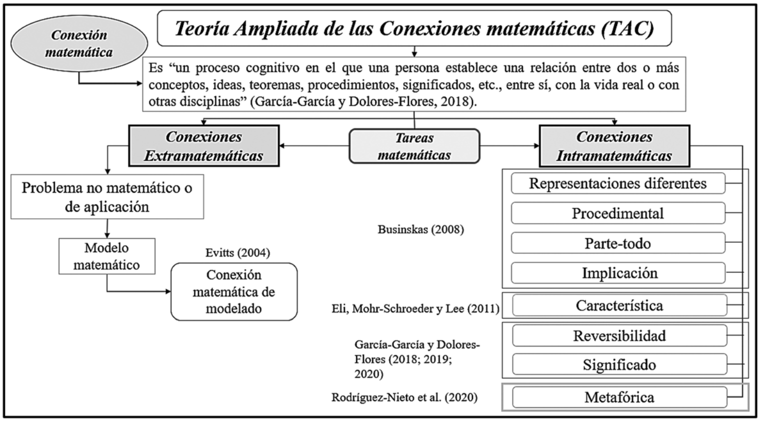
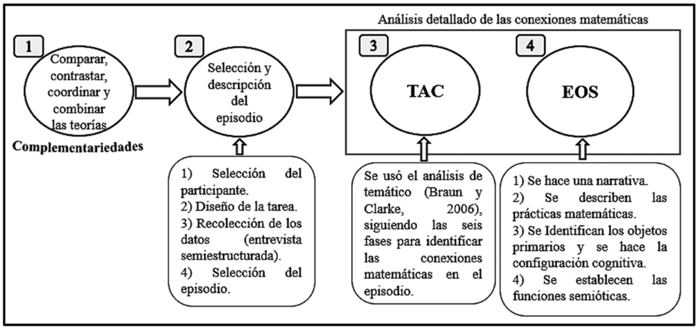


Figura 3. Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas

Fuente: adaptado de García-García (2018), García-García y Dolores-Flores (2018; 2019) y ampliaciones Rodríguez-Nieto et al. (2020).

4.2. Segundo resultado: "Networking of theories" entre la TAC y el EOS

La realización del networking of theories entre la TAC y el EOS (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2021) fue motivado por las limitaciones y ambigüedades para analizar las conexiones matemáticas identificadas en las producciones escritas y verbales que hizo un profesor sobre la derivada (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2020). También, se evidenció que la TAC y el EOS consideran importante la noción de conexión matemática, por lo tanto, asumimos que es relevante articular estas dos teorías para hacer un análisis más detallado de las conexiones matemáticas. Para ello, seguimos la metodología para hacer redes teóricas "networking of theories", en la que, según Radford (2008), se deben tener en cuenta los elementos esenciales de una teoría: principios, métodos y preguntas de investigación. Por esta razón, estos tres elementos guían la comparación y el contraste entre los dos enfoques en la primera fase del networking (ver Figura 4).



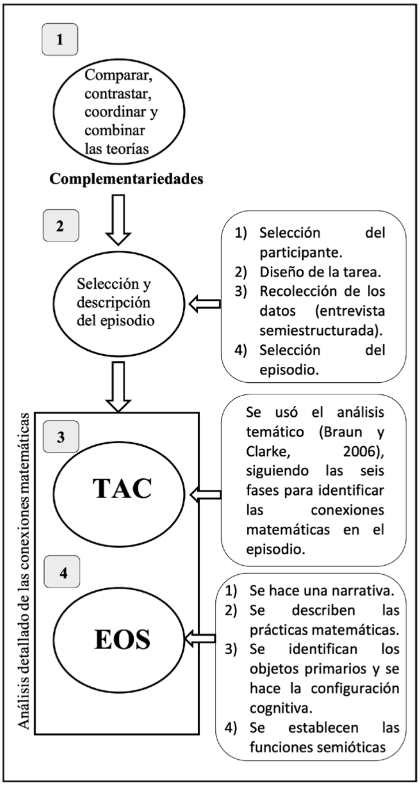


Figura 4. Fases del networking of theories y su aplicación

Se reconoce que existen diferentes estrategias y métodos para hacer networking of theories, por ejemplo, para lograr las complementariedades (fase 1 de la Figura 4) en esta investigación se siguió la perspectiva de Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010), Prediger et al. (2008) y Radford (2008) quienes reportan estrategias para articular teorías que pasan por diferentes momentos. Inicialmente, los investigadores asumen el papel de comprender las teorías involucradas y comunicar las propias para ayudar a otros colegas a comprender sus principios, metodologías y preguntas paradigmáticas. Con base en lo anterior, los autores encuentran diferencias y similitudes en un proceso de comparación y contraste. Posteriormente, se hace la combinación y coordinación con una visión complementaria entre las teorías para proceder con la integración y síntesis. Finalmente, la teoría resultante se unifica considerando principios y aspectos metodológicos.

4.2.1. Complementariedades entre la TAC y el EOS

En la Tabla 2 se presenta una síntesis de las contrastación y comparación realizada entre la TAC y el EOS, considerando sus principios, las similitudes entre la noción de conexión matemática y función semiótica, el rol de la comprensión matemática, la concordancia de métodos y la concordancia de preguntas de investigación.

Tabla 2. *Concordancias entre la TAC y el EOS*

Principios
La TAC considera el principio fundamental de que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se logra cuando el estudiante hace conexiones y, por lo tanto, comprende los conceptos matemáticos. Asimismo, en diversas investigaciones enfocadas en la TAC están de acuerdo con el NCTM (2000) donde se consideran esenciales las conexiones como un proceso matemático que permite relacionar contenidos matemáticos entre sí y entre matemáticas y contextos extramatemáticos. Ahora bien, el EOS asume a las conexiones en las idoneidades epistémica (en la riqueza de proceso) y ecológica (en las conexiones inter e interdisciplinares).
Conexión matemática y función semiótica

En la TAC se considera la conexión matemática como "un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real" (García-García y Dolores-Flores, 2018, p. 229). Mientras que, en el EOS una función semiótica es "una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia" (Font, 2007, p. 105). Además, en Rodríguez-Nieto et al. (2021) se afirma que, la noción de función semiótica (EOS) es más general que la conceptualización de conexión matemática (TAC), dado que las conexiones se consideran casos particulares de funciones semióticas de carácter personal o institucional. En la TAC la conexión matemática puede ser verdadera o no, dejando ver desde la perspectiva del EOS que, cuando un sujeto hace una conexión correcta coincide con la institucional y cuando es incorrecta es de tipo personal.
Comprensión matemática
La TAC concibe la comprensión de manera cognitiva como un proceso mental que es el resultado de tener una red bien conectada de representaciones mentales. De hecho, Berry y Nyman (2003) sostiene que hacer conexiones matemáticas es un buen indicador para comprender conceptos matemáticos. Mientras que el EOS considera la comprensión como una competencia donde se dice que un sujeto comprende un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. Además, se interpreta la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en circunstancia fijadas, en las que pone en juego O como funtivo (expresión contenido) (Font, 2007). Por lo tanto, integrando las posturas sobre comprensión de la TAC y el EOS, se tiene que un aspecto muy importante de la comprensión matemática es el proceso cognitivo que emerge en la actividad matemática mediante el cual un sujeto en su práctica matemática relaciona objetos primarios (situaciones problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, representaciones, argumentos, procedimientos) entre sí, con otras asignaturas o con la vida cotidiana, relaciones que establece por medio de funciones semióticas (conexiones matemáticas). Además, comprender un concepto matemático le permite al sujeto usarlo competentemente en la resolución de problemas.
Concordancia de métodos
La TAC lleva a cabo, de hecho, un enfoque cognitivo-semiótico con base en un análisis temático. La coherencia en esta forma de analizar la actividad matemática es lo que permite la complementariedad de los dos enfoques. Es decir, implícitamente en el análisis temático realizado por la TAC se puede evidenciar el análisis de la actividad matemática que se realiza en el EOS. Además, en Rodríguez-Nieto et al. (2021) se organiza el método para analizar la actividad matemática desde el EOS, que se había propuesto en Font y Rubio (2017), el cual consiste en los siguientes pasos: 1) realizar una narrativa temporal para explicar, en términos matemáticos, lo que hace el alumno o el profesor para resolver la tarea (esta narrativa se relaciona con la transcripción que se hace en la primera etapa del análisis temático de la TAC). Implícitamente se encuentran en esta narrativa las prácticas matemáticas realizadas por el alumno o el profesor y algunos objetos primarios que, metafóricamente, juegan el papel de los protagonistas principales de la narrativa. 2) Las prácticas matemáticas se describen a partir de la narrativa. 3) Se realiza la configuración cognitiva de los objetos primarios involucrados en estas prácticas. Finalmente, 4) se establecen las funciones semióticas entre los objetos primarios de la configuración.
Concordancia de preguntas de investigación

Las preguntas de investigación formuladas por la EOS que están más relacionadas con las formuladas por la TAC se derivan del problema semiótico-cognitivo. Por ejemplo, ¿Cómo se puede generar un nuevo tipo de conexión matemática? ¿Cuál es la influencia de las conexiones matemáticas en la comprensión de conceptos matemáticos?, entre otros. Respecto a esta problemática, en la EOS se asume el conocimiento como el conjunto de relaciones que el sujeto (persona o institución) establece entre objetos y prácticas, relaciones que se modelan utilizando la noción de función semiótica. El EOS se preocupa por responder a preguntas de carácter epistemológico (surgimiento y desarrollo de las matemáticas), ontológico (¿Qué es un objeto matemático? ¿Cómo emergen los objetos en la actividad matemática?), semiótico-cognitivo (significado de los objetos matemáticos), entre otros.

Nota. Esta información se presenta ampliamente en Rodríguez-Nieto et al. (2021).

En la segunda fase de la Figura 1, se seleccionó un episodio correspondiente a la respuesta de un estudiante de licenciatura en matemáticas sobre una tarea propuesta: ¿Qué significa la derivada?, la cual fue aplicada a través de una entrevista semiestructurada (Entrevistador (I), Estudiante (E)) y analizada en la tercera fase con la TAC y en la cuarta fase con el EOS.

4.2.2. Análisis con la TAC

Este análisis se llevó a cabo mediante el método de análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2006), siguiendo las seis etapas presentadas en la Figura 5.

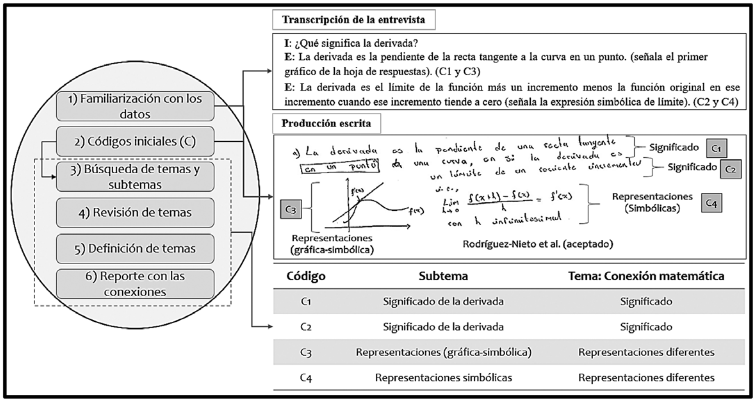


Figura 5. Análisis del episodio con la TAC
Fuente: adaptado de Rodríguez-Nieto et al. (2021)

En el ejemplo de análisis con la TAC (ver Figura 5), se inició con la organización y transcripción de la entrevista en forma de texto con el fin de familiarizarse con los datos. Segundo, se realizó la codificación con frases o palabras que sugerían una idea sobre una posible conexión matemática (C1, C2, C3 y C4). Posteriormente, los códigos se agruparon en subtemas, por ejemplo, C1 y C3 hacen referencia a significados parciales de la derivada, pero en realidad son una conexión de significado (tema). Después, se revisaron los temas con un investigador experto sobre las conexiones (triangulación) y se nombraron, donde se acordó que C1 y C3 pertenecen a un tema denominado conexión de significado, y, C2 y C4 son evidencia conexiones de representaciones diferentes. Por último, se hizo un reporte de conexiones.

4.2.3. Análisis con el EOS

Se siguió el método de análisis con el EOS propuesto en la Tabla 2, donde se hace una descripción de la actividad matemática en forma de narrativa mencionando los personajes principales (Objetos primarios), que está relacionada con la transcripción de la entrevista que se hace en la TAC. Posteriormente, se presentan las prácticas matemáticas (P1, P2, P3, P4 y P5) y una parte de la configuración cognitiva (ver Figura 6) que se muestra ampliamente en Rodríguez-Nieto et al. (2021).

Prácticas matemáticas

P1: Entiende la pregunta.

C1 **P2**: Enuncia la **definición** de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (interpretación geométrica).

C2 **P3**: Enuncia la **definición** de la derivada como el límite del cociente de las tasas medias de variación de la función.

C3 **P4**: **Representa** gráficamente la recta tangente a la gráfica de la función en un punto haciendo énfasis en la pendiente.

C4 **P5**: **Representa** simbólicamente la función derivada como el límite: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

Parte de la configuración cognitiva del estudiante

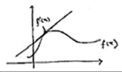
Objetos primarios	Descripción		
Tarea	Explica el significado de la derivada.		
Definición	La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.		
	La derivada como límite del cociente de las tasas medias de variación de la función.		
Representaciones	**Lenguaje natural** Derivada, función, pendiente, recta, punto, recta tangente, límite, curva,…	**Simbólica** $f(x); f'(x)$ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$	**Gráfica** 

Figura 6. Parte de la configuración cognitiva
Fuente: adaptado de Rodríguez-Nieto et al. (2021)

Con base en el análisis presentado en la Figura 6, se evidencia que las conexiones matemáticas (TAC) se pueden identificar en segmentos de la actividad matemática (EOS). En este caso se considera que una conexión matemática es un conglomerado de prácticas, procesos y objetos primarios activados y relacionados por medio de funciones semióticas (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2021). Por ejemplo, en la Figura 6 se muestra que el C1 del análisis temático coincide con la P2 del análisis de la actividad matemática, donde existen procesos de resolución de problemas y enunciación, evidenciándose objetos primarios en la definición (la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto), que se conectan a través de una función semiótica que relaciona un expresión (derivada) con el contenido (significado), estos a su vez conforman a la conexión matemática de significado (ver Figura 7).

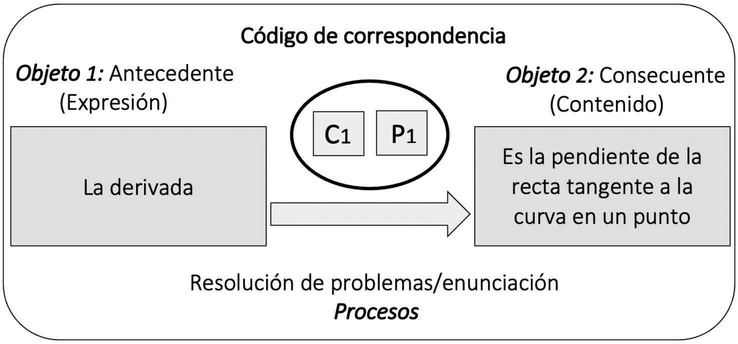


Figura 7. Nueva estructura de la conexión matemática de significado

5. Reflexiones finales

En este trabajo se muestra la TAC con el aporte de las conexiones metafóricas. También, se reconoce que ambas teorías (TAC y EOS) se complementan para un análisis exhaustivo de las conexiones matemáticas. El análisis TAC, que da como resultado una lista temporal de conexiones matemáticas producidas, fue articulado y enriquecido por el análisis onto-semiótico de la actividad matemática del EOS, ya que este último estructura a las conexiones identificadas en el análisis temático y específica qué objetos matemáticos se conectan.

Referencias

Association of Mathematics Teacher Educators [AMTE]. (2017). *Standards for Preparing Teachers of Mathematics*. Available online at amte.net/standards.

Berry, J. y Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479–495. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., y Sánchez, A. (2018). Application of the complementarities of two theories, APOS and OSA, for the analysis of the University students' understanding on the graph of the function and its derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301–2315. https://doi.org/10.29333/ejmste/89514

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brown, L. (1993). *The new shorter Oxford English dictionary on historical principles.* Oxford: Clarendon Press.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* Unpublished PhD Thesis. Simon Fraser University. Canada.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. London and New York: Routledge.

Drijvers, P., Godino, J.D., Font, V., y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 23–49. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación matemática*, *19*(2), 95-128.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En E. J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B.

Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107–122.

García-García, J., y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227–252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J., y Dolores-Flores, C. (2019). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39* (1), 37- 42.

Kenedi, A. K., Helsa, Y., Ariani, Y., Zainil, M., y Hendri, S. (2019). Mathematical connection of elementary school students to solve mathematical problems. *Journal on Mathematics Education*, *10*(1), 69-80.

Kidron, I., y Bikner-Ahsbahs, A. (2015). Advancing research by means of the networking of theories. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative methods in mathematics education—examples of methodology and methods* (pp. 221–232). Springer.

Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176–191.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. Bolema-*Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 60-89. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., y Duval, R. (2017). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. *PNA*, *11*(2), 97-124.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connection theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *40* (2), 165–178. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education*, 40, 317–327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

Rodríguez-Nieto, C., Font, V., Borji, V. y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2021). Mathematical connections from a networking theory between Extended Theory of Mathematical connections and Onto-semiotic Approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., y Font, V. (2020). A new view about connections. The mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., y García-García, J. (2021). Pre-service mathematics teachers' mathematical connections in the context of problem-solving about the derivative. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *12*(1), 202-220. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.797182

Sari, P., Hadiyan, A., y Antari, D. (2018). Exploring derivatives by means of GeoGebra. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 2(1), 65-78. http://doi.org/10.12928/ijeme.v2i1.8670

Tabach, M., Rasmussen, C., Dreyfus, T., y Apkarian, N. (2020). Towards an argumentative grammar for networking: a case of coordinating two approaches. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09934-7

CAPÍTULO 10

EL DESARROLLO DE LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UNA MIRADA DESDE EL LESSON STUDY Y LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

THE DEVELOPMENT OF THE REFLECTION ON THE PRACTICE IN THE TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS A LOOK FROM THE LESSON STUDY AND THE DIDACTICAL SUITABILITY CRITERIA

Viviane Hummes, Adriana Breda, Vicenç Font
vhummes@ub.edu, adriana.breda@ub.edu, vfont@ub.edu
Universitat de Barcelona

Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados relacionados con un estudio teórico y documental sobre la metodología Lesson Study (LS) y el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica (CID), buscando comprender cómo cada uno propone el desarrollo de la reflexión sobre la práctica, propia y ajena, en la formación de profesores. Para ello, se seleccionaron un conjunto de documentos sobre el desarrollo teórico y el uso de los CID y de la metodología LS. Los resultados presentados avalan que el LS tiene en cuenta una fase inicial más amplia de reflexión sobre la planificación de una secuencia didáctica y un trabajo colaborativo a lo largo de un

proceso de instrucción, que permite la emergencia de algunos indicadores y componentes de los CID. Por otra parte, la enseñanza y uso de los CID posibilita al profesorado disponer de una pauta más completa para organizar la reflexión del grupo de profesores.
Palabras clave: *reflexión docente, lesson study, criterios de idoneidad didáctica.*

Abstract

This paper presents some results related to a theoretical and documentary study on the Lesson Study (LS) methodology and the Didactical Suitability Criteria (DSC) construct, seeking to understand how each one proposes the development of reflection on the practice, own and others, in teacher training. For this, a set of documents on the theoretical development and use of the DSC and the LS methodology were selected. The results presented support that the LS takes into account a broader initial phase of reflection on the planning of a didactic sequence and collaborative work throughout an instructional process, which allows the emergence of some indicators and components of the DSC. On the other hand, the teaching and use of DSC enables teachers to have a more complete guideline to organize the reflection of the group of teachers.
Keywords: *teaching reflection, lesson study, didactical suitability criteria*

1. Introducción

Una de las tendencias actuales en la formación de profesores de matemáticas (inicial o en servicio) es la promoción de espacios de reflexión sobre la práctica (propia y ajena), como un aspecto clave para promover el desarrollo profesional docente y la mejora de la docencia. En esta perspectiva, el desarrollo de la reflexión es un tema clave en muchos marcos teóricos que investigan sobre la formación del profesorado, entre otros la Idoneidad Didáctica (Godino, Batanero y Font, 2019) y el *Lesson Study* (Huang, Takahashi y Da Ponte, 2019).

El *Lesson Study* (LS) tiene como núcleo una actividad de investigación en el aula (Burghes y Robinson, 2010; Ponte, Baptista, Velez y Costa, 2012), en la que la reflexión conjunta del grupo de profesores sobre la práctica tiene un papel relevante. Por otra parte, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino *et al.*, 2019) ha desarrollado la noción de Idoneidad Didáctica y su desglose en criterios, componentes e indicadores, como una herramienta para estructurar la reflexión del docente, cuando ésta se orienta a la mejora de los procesos de instrucción de las matemáticas.

En este contexto, el trabajo que se presenta es parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo general es promover e investigar el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas, mediante el diseño y la implementación de un dispositivo formativo que combina el uso del LS y de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID). Este objetivo general se concreta en cuatro objetivos específicos, siendo el primero de ellos: realizar una profundización teórica y documental sobre la metodología LS y el constructo CID y sobre los diseños formativos experimentados con alguno de estos dos referentes, buscando: i) comprender cómo cada uno propone el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores y ii) complementariedades entre estas dos propuestas de desarrollo de la reflexión del profesor. En este trabajo presentamos algunos de los resultados obtenidos hasta el momento relacionados con este primer objetivo específico.

Tras esta introducción, en la segunda sección, se presenta el marco teórico utilizado (LS y CID). En la tercera sección, se presenta la metodología utilizada. En la cuarta, se presentan algunos resultados obtenidos hasta el momento y, en la quinta, se presentan algunas consideraciones finales.

2. Marco Teórico

En este apartado se presenta el marco teórico utilizado.

2.1. La metodología Lesson Study (LS)

El LS surgió en Japón como una metodología de trabajo docente apoyada en actitudes investigativas y prácticas colaborativas entre profesores, que, al mismo tiempo, busca mejorar el aprendizaje de los estudiantes, la mejora de la práctica docente y el desarrollo profesional de los profesores. Consiste básicamente en el diseño colaborativo y detallado de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior (Fernández y Yoshida, 2004; Lewis, 2002; Hart, Alston y Murata, 2011).

La idea es que un grupo de profesores y especialistas si reúne con una problemática en común sobre el aprendizaje de sus alumnos, planeen una lección para que los alumnos aprendan, y, por último, examinen y discutan lo que ellos observan en dicha implementación. A través de múltiples interacciones de este proceso, los profesores tienen muchas oportunidades para discutir el aprendizaje de los alumnos y cómo la enseñanza incide sobre dicho aprendizaje.

De la revisión de la literatura se infiere que existen diferentes modelos de ciclos de LS. Un ciclo realizado en Japón, por ejemplo, considera las siguientes etapas: estudio del currículo y metas; planificación de la clase; realización y observación de la clase; reflexión conjunta sobre los datos registrados y rediseño. Para cada etapa del ciclo, existen algunos criterios que deben ser considerados para que se lleve a cabo el desarrollo de un ciclo completo de LS (Hurd y Lewis, 2011; Lim-Ratnam, 2013).

Figura 1. Ciclo de un LS en Japón.
Fuente: adaptación de Murata (2011)

2.2. Tipos de análisis didácticos propuestos por el EOS e Idoneidad Didáctica

El EOS propone cinco tipos de análisis didácticos para analizar los procesos de instrucción: 1) identificación de prácticas matemáticas; 2) elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; 4) identificación del sistema de normas y metanormas; y 5) valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción (Font, Planas y Godino, 2010).

El primer tipo de análisis estudia las prácticas matemáticas que han tenido lugar en un proceso de instrucción matemático; el segundo tipo de análisis se focaliza en los objetos primarios y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas; el tercer tipo de análisis didáctico se orienta, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas. Estas configuraciones didácticas y trayectorias están soportadas por una trama de normas y metanormas, que son el foco del cuarto tipo de análisis.

Estos cuatro primeros tipos de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto se focaliza en la valoración de la idoneidad didáctica. Los cuatro primeros tipos de análisis permiten, metafóricamente, realizar radiografías de procesos de instrucción (Badillo, Figueras, Font y Martínez, 2013; Pochulu y Font, 2011). El último tipo de análisis se basa en los cuatro análisis didácticos previos y se orienta a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones. Para ello, un constructo básico es la noción de idoneidad didáctica y su desglose en criterios, componentes e indicadores (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Se trata de un constructo multidimensional que se desglosa en seis Criterios de Idoneidad Didáctica parciales: 1) idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas"; 2) idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; 3) idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y, 6) idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, entre otros (Font *et al.*, 2010). A su vez, los CID se desglosan en componentes y estos en indicadores (Breda, Font, Lima y Pereira, 2018).

A priori los CID son principios que orientan cómo se deberían hacer las cosas y, a posteriori los CID sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado. El constructo CID está siendo utilizado ampliamente como herramienta para organizar la reflexión del profesor (en formación o en servicio) sobre su práctica en programas de formación de profesores de diferentes países (Esqué y Breda, 2021; Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Morales, Durán, Pérez y Bustamante, 2019; Seckel y Font, 2020).

3. Metodología

Para alcanzar el objetivo planificado, la metodología ha sido un análisis de fuentes documentales, tanto de documentos teóricos como informes de investigaciones ya realizadas sobre el LS y sobre el uso de los CID para organizar la reflexión del profesor, tomando los autores una posición propia para encontrar concordancias y diferencias entre ambos tipos de propuestas para la formación de profesores.

3.1. Fases seguidas para el estudio del constructo CID

Para estudiar cómo se desarrolla la reflexión en cursos de formación que utilizan el constructo CID, en una primera fase, se seleccionaron un conjunto de documentos para generar un banco de datos sobre el desarrollo teórico y el uso del constructo CID. Para ello, se comenzó con una búsqueda de documentos que describían experiencias de uso de los CID. Además de artículos de investigación, se consideró la revisión de la literatura realizada por Kaiber, Lemos y Pino-Fan (2017) y la búsqueda de investigaciones que utilizaran los CID en actividades de formación docente. Como criterio prioritario para la selección de los documentos, se consideraron los trabajos que se enfocaron en la profundidad de la reflexión de los docentes que participaron en los cursos de formación (cursos de perfeccionamiento docente, cursos de pregrado y/o posgrado), como, por ejemplo, entre otros, los diseños formativos que se documentan en Font, Breda y Pino-Fan (2017); Giacomone *et al.* (2018); Morales *et al.* (2019) y en Seckel y Font (2020). Algunos de estos documentos son videos.

En una segunda fase, se estudiaron, especialmente, los momentos de reflexión previos a la introducción de la enseñanza de la herramienta CID y los momentos en que el profesor hace uso de dicha herramienta para organizar la reflexión sobre su práctica.

Un ejemplo de documento de este banco es un taller de formación de profesores que fue grabado en video <https://educast.pucp.edu.pe/video/6343/capacity_and_network_project_canp_5peru>. El contexto institucional en el que se realizó fue el *Capacity and Network Project* (CANP) de Lima. El (CANP) es un proyecto de desarrollo de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). En 2016, se realizó el CANP 5 en Lima, orientado a la subregión sudamericana conformada por Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú. Los sujetos participantes fueron 40 profesores asistentes al CANP 5 de diferentes nacionalidades: Bolivia, Ecuador, Paraguay, Perú, Francia, EEUU, Costa Rica y Brasil.

Los momentos de reflexión previos a la introducción de la enseñanza de la herramienta CID transcurrieron de la siguiente manera: lo primero que hizo el profesor fue proponer a los asistentes la lectura y análisis de un episodio descrito en Font *et al.* (2010) (páginas 93-94) ¾ en este episodio un grupo de tres alumnos de 15-16 años resuelven un problema contextualizado en una clase de cuarto de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) (España) durante diez minutos¾. Este primer análisis se debía realizar a partir de su experiencia previa. El proceso seguido fue el siguiente: **1)** Lectura individual del contexto del problema y de la transcripción. **2)** Formación de grupos de 3-4 personas. **3)** Análisis didáctico, sin pauta previa, del episodio de clase en grupo. **4)** Elaboración de conclusiones. **5)** Presentación a los otros grupos de las conclusiones.

3.2. Fases seguidas para las experiencias de LS

Para estudiar cómo se desarrolla la reflexión en experiencias de LS, en una primera fase, se seleccionó un conjunto de documentos para generar un banco de datos sobre esta metodología. Para ello, se comenzó con una búsqueda de documentos que describían experiencias de LS. Además de artículos de investigación, se buscaron videos sobre LS en la plataforma web *Youtube*, a partir de los siguientes criterios: i) el importante número de visualizaciones del video y ii) que en ese video se podía observar el proceso de LS de forma completa, es decir, dónde hay una fase de diseño, una de implementación, una de reflexión y una de rediseño de la clase.

En una segunda fase, para cada uno de los documentos seleccionados en la fase anterior, usando los cuatro primeros tipos de análisis didáctico que propone el EOS, se realizaron "radiografías" de los procesos de instrucción diseñados e implementados en una experiencia de LS (cuando esta era posible con la información que se tenía, es decir cuando se describía de manera detallada la implementación). Después, en una tercera fase, se realizó un análisis de contenido para inferir criterios que orientan la práctica del profesor en las experiencias de LS, sobre todo en la fase de diseño y de reflexión. Seguidamente, en una cuarta fase, se realiza un proceso de triangulación entre lo que observan los investigadores a partir del análisis detallado de la segunda fase con los resultados de la tercera fase. Se trata de ver si la "radiografía" obtenida muestra aspectos relevantes no considerados o bien contradictorios con la reflexión realizada por los maestros, sobre todo en la fase de planificación y en la de reflexión del LS.

Ejemplo de aplicación de las tres primeras fases para una experiencia de LS

Un ejemplo del banco de documentos creados (teniendo en cuenta las dos características fijadas previamente) es un video <<https://www.youtube.com/watch?v=VUPTkKJ8ij8&t=1165s>> sobre una experiencia de LS en Chile (producto del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación de Chile) que fue publicado en la plataforma *YouTube* en el 24 de enero de 2012.

Este video ofrece suficiente información para aplicar los primeros cuatro tipos de análisis didácticos propuestos en el EOS. Primero se hace una transcripción de la implementación de la clase. Dado que el proceso de enseñanza de un contenido matemático tiene lugar en un determinado tiempo que incluye una secuencia de configuraciones didácticas (trayectoria didáctica), se segmenta la transcripción en partes que se considera que corresponden a una configuración didáctica (CD), es decir un segmento de actividad de enseñanza y aprendizaje que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea implementada. A continuación, para cada segmento de transcripción se determina la CD, es decir, se identifican las prácticas matemáticas, los procesos y los objetos primarios activados en ellas (tareas, representaciones, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos), las funciones semióticas (FS) que debe establecer el alumno para dar significado a la actividad matemática realizada, las funciones/acciones del profesor y de los alumnos, el tipo de CD, los conflictos semióticos, los patrones de interacción y las normas. El resultado de realizar estos cuatro tipos de análisis propuestos por el EOS es que se dispone, metafóricamente, de una radiografía de la implementación de la clase que hace visibles muchos aspectos sobre los cuales es importante reflexionar.

En la experiencia de un LS, además de los momentos de implementación, hay momentos en los que los participantes reflexionan sobre el diseño de la clase y sobre su implementación. En la tercera fase, se seleccionaron las consideraciones manifestadas por los profesores participantes sobre la secuencia de tareas planificada e implementada o bien sobre su rediseño, que se pudiesen considerar evidencias de reflexión. Después, se analizó si estas consideraciones podrían considerarse como evidencia del uso implícito de algunos de los componentes e indicadores de los CID.

3.3. Fase final

Después de seguir las fases explicadas anteriormente para las experiencias que usan los CID y para las que usan el LS, en la última fase se obtuvieron, primero, resultados sobre el rol de la reflexión en las experiencias que usan los CID y también sobre las que usan el LS y, después, se buscaron complementariedades entre ambos tipos de experiencias.

4. Resultados

Un primer resultado de las experiencias que usan los CID es que, en los momentos iniciales previos a la introducción de este constructo, se propone a los participantes que reflexionen (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, una tarea, etc. Dicho de otra manera los diseños formativos para enseñar los CID se inician con una primera fase de reflexión no pautada. En esta primera fase, se observa que los participantes formulan y usan implícitamente algunos indicadores y componentes de los CID antes que dicho constructo les haya sido enseñados.

Se trata de un fenómeno observado en otras investigaciones que no pretenden implementar un diseño formativo para enseñar los CID. Por ejemplo, en Morales y Font (2017), al analizar los portafolios que profesores en formación inicial en Costa Rica elaboraban para explicar sus prácticas profesionales, se observó que, cuando el profesorado expresa opiniones valorativas, ellas se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los CID. Breda y Lima (2016) al analizar las caracteristicas del análisis didáctico realizado por el profesorado de Brasil que cursa el *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* (PROFMAT) para justificar que sus propuestas representan una mejora en la enseñanza de las matemáticas, observaron que las justificaciones dadas por el profesorado se basan, sobre todo, en el uso implícito de los criterios de idoneidad epistémico, ecológico y mediacional y, en menor medida, en el uso de los criterios cognitivo, emocional e interaccional.

Este hecho, en las experiencias que pretenden implementar un diseño formativo para enseñar los CID, se toma como punto de partida para iniciar la enseñanza de los CID como contenido a ser explicado para organizar la reflexión del docente sobre su propia práctica. Por ejemplo, en Font *et al.* (2017) se explica un ciclo de formación que, en lugar de presentar los CID como principios ya elaborados, crea espacios para su generación como resultado del consenso en el grupo. Posteriormente, los CID se usan para reflexionar sobre la implementación de secuencias didácticas con la finalidad de proponer rediseños que tengan, a priori, más idoneidad didáctica. Ahora bien, esta última aplicación de los CID se hace en asignaturas diferentes a las que han servido para generar los CID y con un cierto desfase de tiempo.

En resumen, en las experiencias donde se imparten los CID (Font *et al.*, 2017), si bien la reflexión de los docentes se organiza a través de una agenda amplia y detallada, se observa, que: a) la fase inicial de reflexión es corta; b) los participantes no realizan una planificación conjunta de una secuencia de actividades, ni realizan una reflexión profunda, grupal, dialogada y crítica de esta planificación; c) el uso de los CID como pauta para organizar la reflexión sobre la secuencia de tareas implementada se produce con un cierto desfase temporal con relación a la enseñanza y aprendizaje de este constructo.

Un segundo resultado del análisis de los documentos sobre experiencias LS, es que, el fenómeno comentado anteriormente sobre el uso implícito de los CID, también se observa en estas experiencias. Por ejemplo, en Hummes, Breda y Seckel (2019), se infieren, mediante una metodología de análisis del contenido, los criterios usados por el grupo de profesores chilenos que participan en la experiencia de LS del video comentado en la sección de metodología, cuando planifican, implementan y reflexionan sobre el proceso de instrucción de esta experiencia. El grupo de profesores se reunió para planificar colectivamente una clase de matemáticas basada en un estándar de desempeño que aparece en el currículo chileno para el nivel básico dos. Las autoras concluyen que el grupo de profesores utiliza, de manera implícita, algunos de los componentes e indicadores de los CID; es decir, existe un consenso implícito o explícito entre el docente que desarrolla la clase y los demás docentes participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales pueden ser reinterpretados en términos de indicadores y componentes de los CID.

Otro ejemplo es la investigación reportada en Hummes, Breda, Seckel y Font (2020) donde se realiza un análisis como el acabado de explicar con una experiencia de LS en Japón en una clase de segundo grado de la escuela primaria de la Universidad de Tsukuba y que fue publicado en la plataforma *YouTube* <<https://www.youtube.com/watch?v=e7uPuSaPQSU&t=9s>> en el 12 de junio de 2012. En este caso, también se observó que el grupo de profesores utiliza, de manera implícita, algunos de los componentes e indicadores de los CID.

Un tercer resultado, relacionado con el tipo de reflexión realizado por los profesores en las experiencias de LS, se halla en Breda, Hummes, da Silva y Sánchez (2021). En este trabajo se presenta primero el análisis didáctico detallado de la fase de implementación de la experiencia de LS chilena comentada anteriormente (sobre un proceso de instrucción de geometría del espacio). Primero se aplicaron los cuatro tipos de análisis didáctico propuesto por el EOS, lo cual permite disponer, metafóricamente, de una radiografía de la implementación de la clase que hace visibles muchos aspectos sobre los cuales es importante reflexionar. Después se hace una triangulación con la reflexión realizada por los participantes (descrita en Hummes *et al*., 2019). Los resultados muestran que el análisis detallado de la implementación de la clase permite observar aspectos relevantes que no fueron contemplados por el grupo de maestros en la fase de reflexión del LS. Se concluye que se debería dar un papel más importante a la fase de observación de la implementación en la metodología LS, por ejemplo, consensuando lo que se ha observado antes de pasar a la fase de reflexión. Dicho de otra manera, se concluye que el paso de acordar entre los participantes del LS lo que pasó en la implementación, es un paso al que no se da, en esta metodología, la importancia que tiene.

Un cuarto resultado es que, en general, en las experiencias de LS la reflexión no llega a estar tan pautada como en las experiencias de formación basadas en los CID. Ahora bien, esto no significa que no hay algunas pautas para tener en cuenta en cada una de las fases del LS. En Hummes, Breda y Font (2020) se elaboró una tabla comparativa identificando qué CID están presentes en cada una de las fases de LS (Tabla 1). En concreto, los CID se utilizaron como categorías cualitativas previas para clasificar los criterios presentes en cada fase de un ciclo de LS.

Tabla 1. Concordancias entre los criterios presentes en un ciclo LS y los CID

Fases del Lesson Study (Hurd y Lewis, 2011; Lim-Ratnam, 2013)	**Criterios de Idoneidad Didáctica** (Breda et al., 2018)
Elección del tema, estudio del currículo y formulación de metas ▪ Elegir el tema y metas basados en los tópicos del currículo vigente. ▪ Estudiar cómo progresa el aprendizaje del estudiante.	▪ Idoneidad Ecológica (adaptación al currículo). ▪ Idoneidad Cognitiva (conocimientos previos; adaptación curricular a las diferencias individuales).
Planificación de la Clase ▪ Desarrollar el raciocinio matemático. ▪ Hacer el estudio de los materiales. ▪ Definir cómo y en qué va estar enfocada la evaluación. ▪ Prever reacciones y dudas de los alumnos. ▪ Trabajar mediante de la resolución de problemas. ▪ Gestionar el proceso de instrucción de manera que los alumnos sean los constructores de su conocimiento. ▪ Tener presente la distribución del espacio de aula y el tiempo estimado de la clase.	▪ Idoneidad Epistémica (riqueza de procesos). ▪ Idoneidad de Medios (recursos materiales; condiciones del aula). ▪ Idoneidad Interaccional (interacción docente-discente; evaluación formativa). ▪ Idoneidad Cognitiva (aprendizaje).
Implementación y observación de la clase ▪ Procurar la participación de los alumnos en cada una de las etapas de resolución de las cuestiones propuestas (comprensión del problema, establecimiento de estrategias y análisis da resolución, etc.). ▪ Observar el proceso de resolución de problemas. ▪ Analizar, comparar y contrastar críticamente sus ideas.	▪ Idoneidad Cognitiva (alta demanda cognitiva). ▪ Idoneidad Epistémica (riqueza de procesos). ▪ Idoneidad Emocional (actitudes y emociones).
Reflexión de la observación ▪ ¿La clase generó conocimiento por parte de los alumnos? ▪ ¿Cuáles fueron las principales dudas de los alumnos? ¿Hubo diversidad de pensamientos? ▪ ¿El material elegido por el grupo de profesores fue adecuado?	▪ Idoneidad Cognitiva (aprendizaje, adaptación curricular a las diferencias individuales). ▪ Idoneidad de Medios (recursos materiales).

5. Consideraciones finales

Un resultado significativo es que en las experiencias de LS, si bien se observa el fenómeno del uso implícito de algunos de los indicadores y componentes de los CID, no se observa el uso de todos los CID. Por ejemplo, en el estudio de caso presentado en Hummes *et al.* (2020) se concluye que el grupo de profesores utilizan de manera muy significativa los criterios interaccional y cognitivo y con menos énfasis los criterios de idoneidad epistémica y emocional; y que, por otra parte, los criterios de medios y ecológico son poco utilizados en la reflexión del grupo profesores. El hecho de la poca reflexión alrededor de estos dos últimos criterios se puede deber al propio enfoque LS, o a que estos dos criterios ya estén muy desarrollados en Japón, o bien a una falta de una pauta explicita que contemple todos los elementos que se deben tener en cuenta para reflexionar sobre la realización de un proceso de instrucción matemático y de cómo mejorarlo.

Los resultados obtenidos muestran cómo, en las etapas de planificación y reflexión de las experiencias de LS, algunos de los componentes e indicadores de los CID aparecen implícitamente en las reflexiones de los participantes como resultado de la discusión grupal. Por tanto, una de las ventajas de trabajar con la dinámica de LS es que algunos aspectos, que no están presentes en la reflexión del propio docente, pueden estar presentes en la reflexión de los demás docentes que participan en el proceso de instrucción. En otras palabras, la metodología LS se convierte en una especie de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CID emerjan como consenso en la reflexión del grupo de profesores.

Los resultados presentados avalan que, para desarrollar (y para investigar) la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas, un dispositivo de formación adecuado puede ser aquel que combine el uso del LS y de los CID como herramienta metodológica para organizar la reflexión del profesor sobre la práctica, ya que este uso combinado puede producir una sinergia relevante para el desarrollo de la reflexión del profesor. Por una parte, los LS permiten una fase inicial más amplia de reflexión sobre la planificación de la secuencia didáctica y un trabajo colaborativo a lo largo de la experiencia, que permite la emergencia de algunos indicadores y componentes de los CID. Por otra parte, la enseñanza y uso de los CID permite al profesorado disponer de una pauta de reflexión más completa para organizar la reflexión del grupo.

Reconocimiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y con el apoyo del programa de Doctorado Pleno en el Exterior proceso número 88881.173616/2018-01 (CAPES).

Referencias

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 207-225.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. y Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, Rio Claro*, *32*(60), 255-278.

Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema,* (en prensa).

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un master para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, 5(1), 74-103.

Burghes, D. N. y Robinson, D. (2010). *Lesson study: enhancing mathematics teaching and learning*. CfBT Education Trust.

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia, 35*(1), 38-54.

Fernández, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah: Erlbaum.

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, *44*(1), 1-21.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37- 42.

Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Netherlands: Springer.

Huang, R., Takahashi, A. y da Ponte, J. P. (2019). Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics around the World. En *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics* (pp. 3-12). Springer, Cham.

Hummes, V., Breda, A. y Font, V. (2020). Desenvolvimento da reflexão de professores: uso combinado da Lesson Study e dos Critérios de

Idoneidade Didática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33*(2), 796-805.

Hummes, V., Breda, A., Seckel, M. y Font, V. (2020). Criterios de Idoneidad Didáctica en una clase basada en el *Lesson Study*. *Praxis & Saber, 11*(26), e10667.

Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En Marbán, J. M.; Arce, M.; Maroto, A.; Muñoz-Escolano, J. M.; Alsina, A. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 393-402). Valladolid, España: SEIEM.

Hurd, J. y Lewis, C. (2011). Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction. EUA: Heinemann Educational Books.

Kaiber, T., Lemos, A. y Pino-Fan, L. (2017). Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS): um panorama das pesquisas na América Latina. *Perspectivas da Educação Matemática*, *10*(23), 531-552.

Lewis, C. C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools. Inc. & Global Education Resources: LLC.

Lim-Ratnam, C. (2013). Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 2(3), 304-306.

Morales, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae, 19*(1), 122-137.

Morales, L., Durán, R. E., Pérez, C. y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Revista Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Murata, A. (2011). Introduction: conceptual overview of lesson study. En Hart, Lynn C., Alston, Alice S.; Murata, Aki. (Ed.). *Lesson study research and practice in Mathematics Education* (pp. 1-12). New York: Springer.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 14*(3), 361-394.

Ponte, J. P. D., Baptista, M., Velez, I. y Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Perspectivas da Educação Matemática*, *1*(1), 7-24.

Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Magis*, *Revista Internacional de Investigación en Educación, 12* (25), 127-144.

CAPÍTULO 11

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE OBJETOS MATEMÁTICOS Y ASIGNACIÓN DE SENTIDOS EN SITUACIONES DE TRATAMIENTO. EL CASO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SEMIOTIC REPRESENTATIONS OF MATHEMATICAL OBJECTS AND ASSIGNMENT OF SENSES IN TREATMENT SITUATIONS. THE CASE OF MATH TEACHERS

Gladys Mejía Osorio[1], Pedro Javier Rojas Garzón[2]
gladys6m@hotmail.com, pjrojasgarzon@gmail.com
[1]Secretaría de Educación Distrital,
[2]Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen

En este trabajo se presenta uno de los resultados de una investigación que busca mostrar similitudes entre las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas y los estudiantes para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento reportadas en la literatura. Estudio que se desarrolló en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación - énfasis en Educación Matemática de la Universidad Francisco José de Caldas. Los resultados obtenidos exponen los

sentidos asignados por un grupo de profesores a expresiones matemáticas, quienes realizan una serie de transformaciones de tratamiento que les posibilita obtener otra expresión, por ejemplo, transforman la expresión en , verifican la igualdad entre ambas (equivalencia sintáctica); sin embargo, algunos profesores no logran relacionar los sentidos asignados a dichas expresiones, en tanto, las relacionan con objetos matemáticos o situaciones diferentes (no reconocen equivalencia semántica).
Palabras clave: *profesores de matemáticas, dificultades, configuraciones cognitivas, funciones semióticas, articulación de sentidos.*

Abstract

In this work, one of the results of an investigation that seeks to show similarities between the difficulties that encounter mathematics teachers and students to articulate the meanings assigned to semiotic representations obtained through treatment reported in the literature is presented. Studio that developed in the framework of the Interinstitutional Doctorate in Education - emphasis in Mathematical Education at Francisco José de Caldas University. The results obtained expose the meanings assigned by a group of teachers to mathematical expressions, who carry out a series of processing transformations that enable them to obtain another expression, for example, transform the expression in , check the equality between both (syntactic equivalence); however, some teachers in the field relate their assigned meanings to express expressions, however, they relate to mathematical objects or different situations (do not recognize semantic equivalence).

Keywords: *teachers of mathematics, difficulties, cognitive configurations, semiotic functions, articulation of senses.*

1. Introducción

En Colombia, desde los estándares curriculares para el área de matemáticas (2006), se establece que unos de los objetivos de la educación matemática es lograr que los estudiantes desarrollen la competencia de expresar y representar ideas matemáticas, así como poder transformarlas, formular y sustentar puntos de vista que requieren el dominio de distintos recursos y registros tanto en lenguaje natural como matemático. Esto demanda que los profesores comprendan las nociones matemáticas que han de enseñar, con un nivel de reflexión y una amplitud de análisis que posibilite la apropiación y el desarrollo de competencias matemáticas por parte de sus estudiantes. En tanto los objetos matemáticos no son perceptibles directamente por los sujetos, las representaciones semióticas son el único medio que tienen para "acceder" a ellos y denotarlos (Duval,2004); y resulta fundamental reconocer un mismo objeto matemático en diferentes representaciones obtenidas mediante transformaciones semióticas.

Al respecto, Duval (2002) explicita tres actividades cognitivas asociadas a los procesos de representación y de transformación: en primer lugar, la *formación* que requiere de la identificación de una representación en un registro semiótico dado; por otro, el *tratamiento* que hace referencia a una transformación semiótica interna de un registro; y en tercer lugar la *conversión* en tanto transformación semiótica externa a un registro. El presente estudio centra la atención en la transformación semiótica de tratamiento, específicamente en mostrar evidencias de similitudes entre las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas y los estudiantes para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidos mediante tratamiento, es decir, la capacidad que tienen estos para relacionar los sentidos asignados entre sí, lo que Rojas (2012, 2015) ha denominado articulación semiótica.

La articulación semiótica es analizada mediante herramientas suministradas desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Bajo este enfoque se consideran prácticas matemáticas vinculadas a los sentidos asignados a expresiones algebraicas y se identifican las relaciones que los profesores establecen por medio de las funciones semióticas que emergen en el proceso de significación. Las funciones semióticas son un constructo teórico empleado en diferentes investigaciones con el fin de analizar procesos de significación de objetos matemáticos (Distéfano, Aznar y Pochulu, 2012; Santi, 2011; Rojas, 2012; Distéfano, Pochulu y Font, 2015; Distéfano y Pochulu, 2017). Se presentan los constructos teóricos del EOS que fundamentan la investigación, así como los aspectos metodológicos que han guiado la misma. En el apartado de los resultados se presentan los significados asignados a expresiones algebraicas por parte de 5 profesores de primaria y se reportan posibles causas de dificultades para relacionar los sentidos asignados entre sí, finalmente se contrastan estos resultados con los reportados por Rojas (2012) en el trabajo con estudiantes al resolver la misma tarea, con el propósito de identificar similitudes y diferencias.

2. Antecedentes de investigación

La revisión de la literatura disponible permite establecer algunos trabajos orientados a evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los profesores de matemáticas en ejercicio respecto a diversos objetos matemáticos, específicamente se centra la atención en investigaciones que documentan las dificultades encontradas por estos profesores para relacionar los sentidos entre sí, otorgados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, es decir, para establecer una articulación de sentidos o articulación semiótica (Rojas, 2012). En esta dirección D´Amore y Fandiño (2007) muestran evidencias específicas de que algunos estudiantes y profesores asignan un sentido a una expresión o representación de un objeto matemático, pero luego de aplicar las leyes y procedimientos respectivos a la expresión, que les permite obtener otra expresión equivalente, no siempre asignan a ésta el mismo sentido dado a la expresión inicial, e incluso asignan un sentido diferente; por ejemplo, algunos interpretan la ecuación como *"una circunferencia"* (que difiere del significado institucional), luego de aplicar los respectivos procedimientos o transformaciones, obtienen quees interpretada como *"una suma que tiene el mismo valor de su recíproco"*; no obstante, al preguntar si esta última ecuación también correspondería a *"una circunferencia"*, algunos estudiantes y profesores afirman que en este caso no, en tanto las dos variables e *y* no están al cuadrado, es decir, no tiene la forma la cual es asociada con la *"circunferencia"*. Estos autores sostienen que al parecer la transformación es lo que da sentido, puesto que, al realizar el proceso inverso reconocen que *"se volvería a la circunferencia"*. En este caso los significados se atribuyen a las representaciones específicas, sin relacionarse entre sí, y tanto estudiantes como profesores realizan las transformaciones semióticas adecuadamente, pero con un cambio de sentido en la nueva representación.

Otro ejemplo, está relacionado con la expresión que en lenguaje natural puede ser interpretada como la *suma de tres números naturales consecutivos*, pero después de realizar los procedimientos respectivos, las transformaciones de tratamiento y obtener la expresión 3 , se interpreta como *el triple de un número natural*; sin embargo, al preguntar si la expresión 3 puede ser interpretada como *la suma de tres números naturales consecutivos,* varios estudiantes y profesores manifiestan que no, puesto que en la expresión debería aparecer el símbolo más. En un caso similar, relacionado con la suma de los primeros 100 números positivos naturales: 1 + 2 + … +

99 + 100, expresión que a su vez puede transformarse en 101 × 50, la cual es reconocida por muchos como resultado de dicha suma, pero para algunos no corresponde a la representación del objeto inicial. La presencia del signo de multiplicación obliga a estudiantes y profesores a buscar sentido en objetos matemáticos en los que aparezca el término *multiplicación* o términos similares; de hecho, al preguntar si 101 × 50 corresponde o no a la suma de los primeros 100 números naturales positivos, algunos manifiestan que no, en tanto "*la operación indica una multiplicación, no una suma*". En un ejemplo adicional, asociado a la tarea de encontrar *"la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado"*, varios estudiantes y profesores reconocen que las fracciones , y son equivalentes *(sintácticamente),* como objetos matemáticos, y representan el evento aleatorio relacionado, pero afirman que esta última no es una *"expresión significativa"* de la situación planteada, es decir, no reconocen la equivalencia semántica. Al respecto, D´Amore (2006) manifiesta que algunos significados son asociados culturalmente, por ejemplo, la expresión 3   es el triple de algo; 101 × 50 es un producto, no una suma. Los signos usados en las representaciones, directamente relacionados con la experiencia de los sujetos, juegan un papel importante en la asignación de significados, en este caso el lenguaje aritmético suele ser la experiencia más significativa.

Por su parte, Rojas (2012) realizó un estudio orientado a documentar el fenómeno relacionado con las dificultades que encuentran algunos estudiantes para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático obtenidas mediante tratamiento. El autor realiza una descripción y un análisis de los procesos de asignación de sentidos de 9 estudiantes de educación secundaria, 6 de grado 9º y 3 de grado 11º, en tres instituciones de la ciudad de Bogotá. Los estudiantes desarrollaron el trabajo en pequeños grupos en relación con tres tareas específicas (situaciones de probabilidad simple, de expresiones algebraicas y de geometría analítica), en las que se indagaba por los sentidos asignados a ciertas representaciones semióticas obtenidas mediante transformaciones de tratamiento. Los resultados muestran que varios estudiantes encuentran dificultades para articular diversos sentidos asignados a expresiones asociadas con un mismo objeto matemático, reconocen la equivalencia sintáctica entre dos o más expresiones dadas (realizan las transformaciones de tratamiento requeridas a una de las expresiones para obtener la otra expresión), pero no siempre consiguen articular los sentidos asignados a dichas expresiones, es decir, no reconocen la equivalencia semántica e incluso pueden cambiar el sentido inicialmente asignado a estas expresiones. El autor clasifica dichas dificultades en cuatro grupos: (i) reconocimiento icónico de las expresiones, en tanto asignan significado a las expresiones basados en un reconocimiento icónico de las mismas; (ii) anclaje a situaciones dadas, tendencia a realizar interpretaciones ligadas con la situación propuesta, por ejemplo, al pedir calcular la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par; (iii) interacción y cambios en la interpretación y (iv) falta de apropiación del lenguaje matemático. Así mismo, Rojas (2012) plantea que en indagaciones similares a las que son reportadas en su trabajo, en un contexto no formal, con estudiantes universitarios que cursaban carreras relacionadas con la formación de profesores de matemáticas y con profesores de matemáticas en ejercicio, en ciudades como Bogotá, Valledupar y Pasto (Colombia), así como en la ciudad de Guatemala (Guatemala), encontró similitudes con el trabajo realizado por estudiantes de educación secundaria frente a las tareas propuestas, pero reconoce que aún faltan trabajos rigurosos en torno a ese fenómeno del tratamiento. Por su parte, Rico (1998) manifiesta que los profesores en formación y los profesores en ejercicio cometen errores al enfrentarse a tareas matemáticas y muchas de ellas similares o debidas a las mismas causas que cometen los estudiantes. Los ejemplos presentados en esta sección dan cuenta de la no articulación o cambio del significado asignado a expresiones matemáticas, especialmente por parte de profesores, quienes al realizar las transformaciones semióticas de tratamiento reconocen la equivalencia sintáctica de las expresiones obtenidas, pero no la equivalencia semántica, en tanto las asocian con objetos matemáticos o situaciones diferentes.

3. Marco teórico

El análisis de las producciones de profesores que se reporta en este estudio se realizó a partir de constructos teóricos propuestos desde el Enfoque Ontosemiótico (eos). Dentro de este enfoque un objeto matemático es todo aquello que es indicado, señalado o nombrado, cuando se hace, se comunica o se aprende Matemáticas (Godino, 2002). La práctica matemática es asumida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartida en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar o generalizar la solución a estos problemas (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012). En la práctica matemática se activa una configuración de seis tipos de objetos primarios (Font, Godino y Gallardo, 2013): situaciones problemas, lenguaje, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos, los cuales se vinculan entre sí; en tanto las situaciones problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje es el soporte para representar a las demás entidades y son un instrumento para la acción, los argumentos justifican tanto los procedimientos como las proposiciones que ligadas a las definiciones resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones, entre los seis objetos primarios, determinan las configuraciones o "redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos" (Godino, Batanero y Font, 2008, p.8) activadas por los sujetos, que a su vez son herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos en su doble versión: personal e institucional.

Se asume que en toda transformación de tratamiento subyace la noción de equivalencia, en tanto se parte de una expresión, representación de un objeto dado, y mediante la aplicación de reglas y procedimientos válidos al interior del respectivo registro semiótico se obtiene otra expresión que representa el mismo objeto. En correspondencia con el modelo teórico del EOS se considera que en la comprensión de la noción de equivalencia existen dos fuentes de significados parciales: sintáctico y semántico, así como su necesaria articulación. Estos dos aspectos de la equivalencia *(sintáctico - semántico)* se observan en los planteamientos de Chalé-Can, Font y Acuña (2017), Chalé-Can (2018) y Mejías (2019), quienes coinciden en el papel fundamental que juegan estos dos aspectos, la necesidad de relacionarlos en el trabajo de aula para una adecuada comprensión de la equivalencia y del proceso de significación para dar sentido a los símbolos y posibilitar un proceso de generalización que permita enunciar una proposición como punto de partida para el tratamiento simbólico posterior. Chalé-Can et al. (2017) consideran que la mayoría de los sujetos realizan una evaluación numérica que les permite tener un acercamiento a la equivalencia, posibilitando un desarrollo primitivo e ingenuo de esta noción, hecho que vincula expresiones por medio de diferentes transformaciones como factorización, expansión, agrupación, simplificación de términos o una evaluación numérica, etc.

En relación al aspecto sintáctico, se dice que dos expresiones A y B son equivalentes cuando es posible aplicar una serie de reglas y procedimientos que permiten transformar una en otra. Así, dos expresiones algebraicas son sintácticamente equivalentes cuando tienen una reescritura común, la cual puede ser obtenida por medio de la aplicación de propiedades algebraicas conocidas (conmutativa, asociativa, distributiva, identidades notables, etc.). Por ejemplo, en el caso particular de la tarea sobre expresiones algebraicas, al aplicar las reglas de transformación a $(n - 1) + n + (n + 1)$ se obtiene , lo cual permite concluir que las dos expresiones son sintácticamente equivalentes. En su aspecto semántico, se dice que dos expresiones son equivalentes cuando se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados y en el que, además, se puede reconocer que estos dos significados son el mismo, por ejemplo, la expresión interpretada como la *suma de tres números consecutivos*, también puede ser interpretada como el *triple de un número*, tal y como se muestra en la Figura 1.

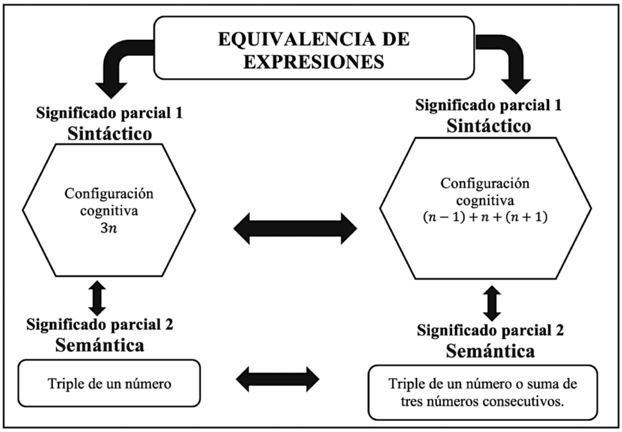


Figura 1. Equivalencia de expresiones algebraicas.
Fuente: Elaboración de los autores. Adaptado de Chalé-Can, Font y Acuña (2017).

4. Metodología

Este trabajo se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa de tipo descriptivo e interpretativo (Rodríguez, Gil y García, 1996; Goetz y Lecompte, 1988), el cual resulta pertinente para analizar los sentidos asignados a representaciones semióticas de un objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento, y la relación entre sí de dichos sentidos. También se hace uso de algunos elementos del análisis ontosemiótico propuesto por el EOS (Godino, 2002), como las prácticas matemáticas vinculadas a la interpretación de expresiones algebraicas y las funciones semióticas definidas en este proceso de significación, elementos que posibilitan el análisis de las configuraciones cognitivas que describen y caracterizan de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que se activan e intervienen en las prácticas matemáticas (interpretaciones y usos de expresiones algebraicas), con el fin identificar y caracterizar las dificultades que encuentran los profesores para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas, obtenidas mediante tratamiento, por medio de las relaciones que ellos establecen.

El estudio contó con la participación de un grupo de profesores vinculados a instituciones educativas con las cuales la investigadora de este trabajo tenía relaciones laborales, quienes a su vez tenían vínculos con otros profesores de matemáticas en diferentes instituciones educativas del país (Colombia) que se despeñan en educación básica (primaria y secundaria) y media vocacional (10° y 11°) que ofrecieron posibilidades de colaboración y aceptación para participar en este estudio. Con esta red de profesores se logró tener una participación de 32 profesores de primaria y 32 de secundaria, ubicados en ocho regiones. En Colombia los profesores de matemáticas que se desempeñan en la educación básica primaria, salvo algunos casos, no cuentan con una formación específica en matemáticas. Con los dos grupos de profesores se trabajaron 4 tareas, dicho proceso se llevó a cabo de manera virtual. Los análisis y resultados que se presentan corresponde a la tarea sobre interpretación de expresiones algebraicas, tema que fue trabajado con estudiantes por Rojas (2012), la cual hace referencia a:

(Tarea – Interpretación de las expresiones). En lo que sigue, asuma que n representa un número natural cualquiera.

1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted a la expresión $3n$.
2. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$
3. ¿Qué relación hay entre la expresión $(n-1)+n+(n+1)$y la expresión $3n$?
4. ¿La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede interpretarse como ***el triple de un número****?*

De este grupo de 64 profesores (32 primaria y 32 secundaria) se seleccionaron aquellos profesores que, mínimo en tres tareas de las cuatro propuestas, aplicaban una serie de procedimientos y reglas (transformaciones de tratamiento) lograron establecer y verificar la equivalencia de expresiones desde lo sintáctico, pero al dotar de sentido y significado dichas expresiones no lograron relacionar entre sí los sentidos asignados a éstas, y fueron asociadas con situaciones o con objetos matemáticos diferentes, impidiendo el reconocimiento de la equivalencia semántica, lo cual se ha denominado como *no articulación semiótica* (Rojas, 2012). Tal y como se evidencia en una de las producciones realizadas por la profesora Primaria-9.

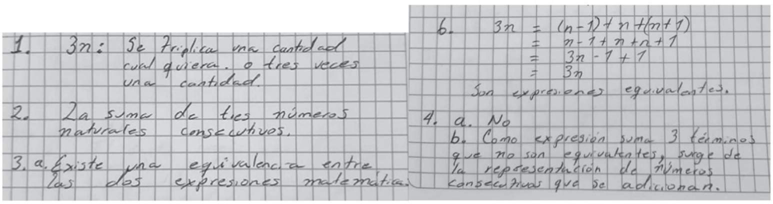

1. $3n$: Se triplica una cantidad cual quiera. o tres veces una cantidad.
2. La suma de tres números naturales consecutivos.
3. a. Existe una equivalencia entre las dos expresiones matemáticas.
b. $3n = (n-1)+n+(n+1)$
$= n-1+n+n+1$
$= 3n-1+1$
$= 3n$
Son expresiones equivalentes.
4. a. No
b. Como expresión suma 3 términos que no son equivalentes, surge de la representación de números consecutivos que se adicionan.

Figura 2. Producción la profesora Primaria-9

En la anterior producción se evidencia que la profesora otorga significados a las expresiones $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ y $3n$ aplica una serie de transformaciones que le permite verificar que ambas expresiones son iguales *(equivalencia sintáctica),* pero expresa que la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número en tanto representa situaciones u objetos matemáticos diferentes *(no reconoce equivalencia semántica).* Con base en el criterio de selección de la población antes mencionado, se contó con 5 profesores de primaria y 6 de secundaria, quienes conformaron un estudio de caso colectivo (Stake, 1994): para este trabajo se presenta los análisis y resultados del grupo de 5 profesores de primaria, de una de las cuatro tareas propuestas. El grupo estuvo conformado por: primaria-3, primaria-4, primaria-9, primaria-31 y primaria-32. En lo que sigue del escrito se nominarán con las letras A, B, C, D, E y F, junto a la etiqueta del grupo (en este caso, primaria).

5. Análisis y resultados

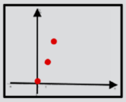
Con el propósito de evidenciar los sentidos otorgados por los 5 profesores de primaria cuando resuelven una tarea que requiere la interpretación de expresiones algebraicas, así como identificar las dificultades que encuentran para relacionar los sentidos otorgados a éstas, se presenta una rejilla en la que se sintetizan las configuraciones cognitivas de objetos primarios activados al solucionar la tarea propuesta. Se muestran las relaciones entre los objetos primarios que determinan la configuración cognitiva activada por cada profesor. Según Rondero y Font (2015), estos son relacionados entre sí, en tanto las situaciones-problemas son origen y motivación de la actividad matemática, el lenguaje actúa como soporte para representar a las entidades y a su vez son soporte para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas.

Tabla 1. *Configuraciones cognitivas activadas por el grupo de profesores de primaria*. Fuente: Elaboración de los autores

(Tarea – Interpretación de las expresiones). En lo que sigue, asuma que n representa un número natural cualquiera.

Diga qué significa o que interpretación le asigna usted a la expresión .
Diga qué significa o que interpretación le asigna usted a la expresión
¿Qué relación hay entre la expresión y la expresión ?
¿La expresión puede interpretarse como el triple de un número

Docente	Lenguaje	Definiciones	Propiedades	Procedimientos	Argumentos
Primaria A	Tres veces un número Número natural Expresiones Ecuación Agrupación Resta Suma Simbólico: $3n$ $(n-1)+n+(n+1)$	Definición 1 Cualquier número natural 3 veces Definición 2 Un número cualquiera se le resta uno y luego se le suma uno	$(n-1)+n+(n+1)=3n$ Se agrupan y se obtiene el mismo resultado Propiedad implícita: Equivalencia de expresiones	Operación de términos semejantes	Tesis: La propiedad no es válida Razón: En la segunda expresión la n no es el mismo número como sucede con el triple de un número
Primaria B	Tres veces un número Triple de un número Número consecutivo Número natural Suma Simbólico: $3n$ $(n-1)+n+(n+1)$	Es el triple de un número cualquiera. Tres veces el número Definición 2 La suma de tres números consecutivos cualquiera	$(n-1)+n+(n+1)$ $= 3n$ Si n es un número en ambos casos y además es el mismo número da el mismo resultado.	Operación de términos semejantes	Tesis: La propiedad no es válida Razón: En la primaria expresión $(n-1)$ $\neq n \neq (n+1)$ se tiene un número igual tres veces y en la segunda el número es diferente.

Primaria C	**Tres veces n Cantidad Número natural Número consecutivo Equivalencia Expresiones Suma Simbólico: $3n$ $(n\text{-}1)+n+(n+1)$**	**Definición 1 Se triplica una cantidad cualquiera Tres veces un número Definición 2 La suma de tres números consecutivos**	**$(n\text{-}1)+n+(n+1)$ $= 3n$ Equivalencia entre expresiones algebraicas.**	**Aplicación de propiedades**	**Tesis: La propiedad no es válida Razón: En la segunda expresión se suma tres términos que no son iguales o equivalentes que surge de la representación de tres números consecutivos**
Primaria D	**Tres veces un número Función lineal Números consecutivos Expresiones Equivalentes Antecesor Sucesor Número Simbólico: $3n$ $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ Gráfico** 	**Definición 1 El triple de un número Tres veces el número Definición 2 Suma de tres números consecutivos**	**$(n\text{-}1)+n+(n+1)$ $= 3n$ Son equivalentes**	**Evaluación con un número particular $n = 1$**	**Tesis: La propiedad no es válida Razón: En la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ se están sumando el antecesor, el número y el sucesor.**
Primaria E	**Expresión algebraica Triple de un número Incógnita Operaciones Valor Simbólico: $3n$ $(n\text{-}1)+n+(n+1)$**	**Definición 1 Expresión algebraica que indica el triple de un número Definición 2 Darle un valor a en cada operación indicada donde se halla el valor**	**$(n\text{-}1)+n+(n+1)=3n$ La n es común y da el mismo resultado Son equivalentes**	**Evaluación con un número particular a n**	**Tesis: La propiedad no es válida Razón: En la segunda expresión la n toma valores diferentes y no siempre es el triple de un número.**

Con base en estas relaciones entre los seis objetos primarios, la profesora [Primaria-A] asocia la expresión *3n* con tres veces cualquier número natural y la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ como un número cualquiera que se le resta uno y luego se le suma uno *(conversión de lenguaje simbólico a lenguaje natural).* La profesora reconoce que ambas expresiones son iguales *(equivalencia sintáctica),* pero desde el aspecto semántico no admite la veracidad de la conjetura, en tanto, en la expresión la toma diferentes valores *(3 números diferentes),* lo cual no sucede con el triple de un número, pues los tres números son iguales *(no equivalencia semántica).* La profesora [Primaria-B] interpreta la expresión *3n* como el triple de un número cualquiera o tres veces n, y la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ como la suma de tres números consecutivos. Reconoce que si es el mismo número en ambos casos, se obtiene el mismo resultado. Aspecto que le permite verificar la relación de igualdad entre ambas expresiones. Respecto a los argumentos dados: sintácticamente la profesora admite que las expresiones son iguales; pero desde el aspecto semántico la conjetura no es válida puesto que, en la segunda expresión se tiene $(n\text{-}1) \neq n \neq (n+1)$. La profesora [Primaria-C] relaciona la expresión $3n$ con el triple de una cantidad cualquiera o tres veces el número, la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ es asociada con la suma de 3 números consecutivos. Frente a las propiedades la profesora reconoce que $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ es decir, que las dos expresiones son equivalentes. Respecto a los argumentos dados por la profesora, desde lo sintáctico las expresiones son iguales, pero desde lo semántico la conjetura no es válida, puesto que en la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ se suma 3 términos que no son iguales o equivalentes en tanto, relaciona 3 números consecutivos.

La profesora [Primaria-D] asocia la expresión $3n$ con tres veces un número o una función lineal, la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ es relacionada con la suma tres números (antecesor, número, sucesor). En términos del reconocimiento de la equivalencia desde el punto sintáctico reconoce que $(n\text{-}1)+n+(n+1) = 3n$ (aplicación de propiedades). La profesora [Primaria-E] interpreta la expresión $3n$ como el triple de un número, aunque específicamente no asigna un significado a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ reconoce que al darle un valor específico a n en cada operación y al realizar éstas se obtiene el mismo resultado. En términos del reconocimiento de la equivalencia, desde el punto sintáctico, admite que las expresiones $(n-1)+n+(n+1) = 3$ son iguales, pero la expresión no puede ser interpretada como el *"triple de un número",* puesto que, se tienen 3 números diferentes.

En cuanto a las funciones semióticas, las profesoras de primaria-A, B, C y F establecen tres: una entre el antecedente "*3n*" y el consecuente *"el triple de un número cualquiera o tres veces el número ;* otra entre el antecedente "" y el consecuente *"la suma de tres números consecutivos cualquiera"*; y una tercera entre el antecedente y $(n-1)+n+(n+1)$ y los consecuentes *"las expresiones son equivalentes",* "*sí es un número en ambos casos y además es el mismo número da el mismo resultado"* que les posibilita reconocer la igualdad de las expresiones, obtenida mediante transformaciones de tratamiento *(aspecto sintáctico),* desde su aspecto semántico la conjetura no es válida, en tanto, en la expresión $(n-1) \neq n \neq (n+1)$ y en la expresión $3n$ se tiene un número igual tres veces. La profesora de primaria-D, establece cuatro funciones semióticas: una entre el antecedente y el consecuente *"el triple de un número cualquiera o tres veces el número n"*; otra entre el antecedente *"cada número se multiplica por 3" (asigna casos particulares),* la tercera entre el antecedente $(n-1)+n+(n+1)$ y el consecuente *"suma de tres números consecutivos"*; y una cuarta, entre el antecedente "$(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$" y el consecuente *"expresiones equivalentes".* En las soluciones realizadas se evidencia que las profesoras reconocen y admiten la equivalencia *sintáctica* entre las expresiones, en tanto, al aplicar las transformaciones de *tratamiento* a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ obtienen $3n$, argumentan que la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el "*triple de un número*", puesto que relaciona tres números diferentes; aspecto que fue corroborado en la entrevista semiestructurada desarrollada a la profesora-D.

> **Entrevistadora**: Buenas tardes profe. Gracias por dedicar unos minutos de su tiempo para charlar un poco sobre las soluciones realizadas en cada tarea. Iniciemos con la tarea que corresponde a la interpretación de expresiones algebraicas (la entrevistadora compartió la pantalla con las fotos de las producciones de la profesora) ¿alcanza a ver mi pantalla?
>
> **Primaria-D**: Sí señora. (Indicando que sí con un movimiento afirmativo de la cabeza)
>
> **Entrevistadora**: (Amplia el tamaño de la presentación). Frente a la primera pregunta la profesora escribió que la expresión de puede ser interpretada como el triple de un número o 3 veces el número y que la expresión corresponde a la suma de 3 números consecutivos. También que las dos expresiones son equivalentes. En el cuarto ítem se indagaba si la expresión puede ser interpretada como el triple de un número, escribió que no. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la no puede ser interpretada como el triple de un número.
>
> **Primaria-D**: Bueno (guarda un momento de silencio) las expresiones son equivalentes pero una cosa es tener un número completico, por ejemplo, en la expresión que es un número multiplicado por tres o la suma de tres números iguales y en la expresión es la suma de tres números diferentes, el número, el sucesor y el antecesor.
>
> **Entrevistadora**: Pero si se hacen las operaciones obtienen el mismo resultado ¿Cierto?

> **Primaria-D**: Sí (indicando que si con la cabeza) pero no significaría lo mismo desde mi perspectiva porque no son lo mismo como que te digo en la segunda expresión no es el número tres veces (o sea) tengo números diferentes, números distintos (un momento de silencio) así pues digamos en el caso de cuatro en la expresión seria 12 y en la segunda expresión se tendría 3+ 4+ 5 que es igual a 12. Aunque son los mismos resultados son situaciones diferentes.
>
> (Diálogo entre el profesor y la investigara, 2020)

En la transcripción se evidencia que la profesora refuerza los argumentos dados en la solución inicial de la tarea, enfatiza que la expresión hace referencia a la multiplicación y la expresión a la suma de 3 números consecutivos (diferentes). La profesora introduce el concepto de número *"completo"*, para referirse a un número igual, para ello recurre a un caso particular que al ser multiplicado con tres se obtiene 12, y la expresión relaciona tres números diferentes, por ejemplo, al emplear el mismo caso de se tiene 3 + 4 + 5, respectivamente; aspecto que jugó un papel fundamental para no admitir la equivalencia semántica entre las expresiones.

En correspondencia con los dos significados parciales *sintáctico y semántico*, en la Figura 3 se muestra que desde el significado parcial sintáctico la aplicación de reglas permite encontrar otra expresión, como en el caso de la expresión se obtiene que permite concluir que las dos expresiones son equivalentes. En el caso particular de la tarea propuesta el aspecto sintáctico no fue suficiente para algunos profesores, quienes desde el significado parcial semántico plantearon que las expresiones refieren a situaciones u objetos matemáticos diferentes.

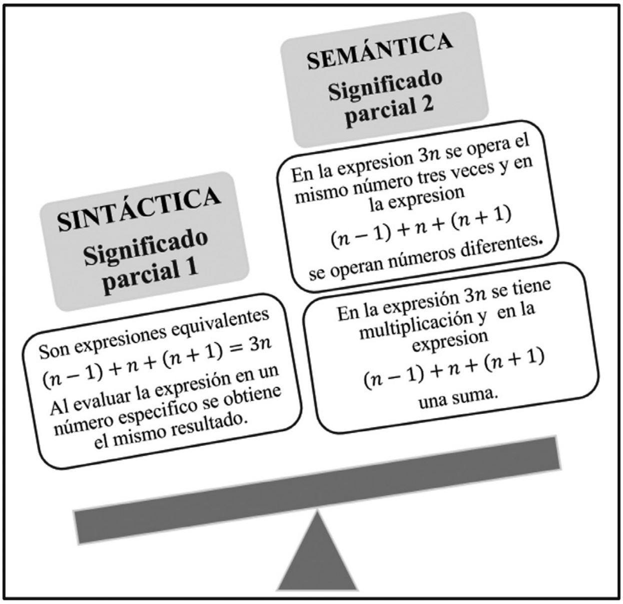


Figura 3. No articulación de los significados parciales sintáctico y semántico a la equivalencia de las expresiones $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ y $3n$. Fuente: Elboración de los autores

En su aspecto *semántico* se tienen dos expresiones equivalentes, en tanto existe un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados contextuales que permiten concluir que ambas expresiones pueden ser interpretadas como el triple de un número. Los resultados muestran que, a pesar de verificar la equivalencia desde lo sintáctico, el ir más allá de la aplicación de reglas, los dos sentidos asignados a cada expresión no necesariamente se logran relacionar entre sí.

5. Consideraciones finales

El trabajo desarrollado brinda evidencias sobre las dificultades que encuentran algunos profesores de matemáticas para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento. Frente a la tarea que se reporta se identifican similitudes entre las dificultades que encuentran los profesores reportados en este estudio con las documentadas por Rojas (2012) sobre el trabajo que realizan los estudiantes al resolver la misma tarea. Por ejemplo, en relación con la situación de interpretación de expresiones, el autor reporta que "algunos estudiantes asignan sentido a las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ basados en un reconocimiento icónico de las mismas"; en tanto la forma de estas expresiones determinan la interpretación realizada; específicamente centran la atención en "la forma de las expresiones" y los procesos asociados a cada expresión. Reporta también que "algunos estudiantes logran reconocer una equivalencia entre las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, asignando valores específicos de n (casos particulares) pero no logran articular los sentidos asignados a cada expresión". Inicialmente interpretan la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ como una suma de tres números consecutivos, pero no como 3 veces un número, y argumentan que "*el triple de un número no es así, sino (que) esa es la suma de tres números consecutivos, no la suma tres veces un mismo número*" (Rojas, 2012, p. 117). Se evidencia así la similitud de estos con los aportados por los profesores.

Otros argumentos dados por los estudiantes muestran que centran la mirada en la forma de las expresiones y los procesos asociados con cada una, algunos afirman: "*porque son tres términos diferentes* (se refiere a los términos n-1; n; n+1), *para ser el triple de un término tienen que ser iguales, pues ahí no*", "*porque esta expresión contiene suma, restas, paréntesis, números agregados y las enes*" (Rojas, 2012, p. 117). En su mayoría los estudiantes reconocen que de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se obtiene como resultado la expresión 3 , pero la expresión inicial no es el triple de un número, puesto que se suman números diferentes, en cambio 3 o el triple de relacionan tres términos semejantes o iguales, es decir, cada una de estas expresiones incorpora procedimientos que las diferencian. En conclusión, los estudiantes argumentan que la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ no puede ser el triple de un número, pues si bien hay 3 términos estos son todos diferentes, tal y como se evidencia en el siguiente argumento dado por un estudiante *"para que sea el triple de un número, los tres términos tienen que ser iguales o semejantes y ahí no muestra eso; ahí muestra que es una operación de tres, pero ... no, no creo sea el triple"* (Rojas, 2012, p. 118). Por otro lado, algunos estudiantes afirman que la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ incorpora sumas, restas, números *"agregados"* y paréntesis, mientras en la expresión 3 sólo incluye una multiplicación o se suman 3 números iguales. En general, los anteriores argumentos resultan similares a los dados por los profesores y permiten concluir que los sentidos asignados por los profesores también están asociados con la forma de las expresiones. En las soluciones dadas se evidencia un hecho cultural en relación a la asignación de sentido, precisamente que éste es asignado en correspondencia con el *reconocimiento icónico de las expresiones.*

Como se mencionó inicialmente, este trabajo parte del supuesto de que los elementos sintácticos y semánticos son parte constitutiva de la equivalencia, y que se requiere la articulación entre estos dos elementos: en su aspecto *sintáctico* los profesores realizan una serie de prácticas como la aplicación de transformaciones de tratamiento (agrupación de términos semejantes, evaluación con un número particular, aplicación de propiedades) que les posibilita obtener una expresión a partir de otra, como en el caso en que transforman $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ en $3n$; en su aspecto *semántico* la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ no es admitida por algunos profesores como el "*triple de un número*", en tanto consideran que la expresión $3n$ relaciona tres números iguales mientras que la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$ relaciona tres números diferentes, otros manifiestan que la expresión $3n$ involucra una multiplicación, mientras la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ una suma, argumentos similares a los presentados por los estudiantes y que fueron documentados por Rojas (2012, 2015).

En cuanto a la complejidad de la noción de equivalencia descrita por medio de dos significados parciales (aspectos sintáctico y semántico), la valoración numérica de cada expresión realizada por los profesores mediante la asignación de un número específico, puso en evidencia este hecho: para algunos profesores fue el paso que les permitió, no sólo obtener el mismo resultado sino verificar la equivalencia, estableciendo así una relación entre los aspectos semántico y sintáctico; para otros este hecho no fue suficiente y a pesar de obtener el mismo resultado no reconocieron la equivalencia semántica, en tanto "*veían*" expresiones con formas diferentes que les evocaba operaciones diferentes, sentidos diferentes que no se relacionaban entre sí. Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can et al. (2017) se reconoce que la complejidad en torno a la equivalencia de expresiones algebraicas requiere del aspecto sintáctico y el semántico, así como su necesaria articulación, en tanto cada significado posibilita una serie de prácticas matemáticas específicas, tales como: i) *Equivalencia sintáctica*: la evaluación particular con un número específico o la operación de términos semejantes permite establecer que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son iguales en tanto generan el mismo resultado; y ii) *Equivalencia semántica*: permite evidenciar que existen diferentes maneras de representar un mismo número, como el caso de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ que puede ser interpretada como el "*triple de un número*", en tanto equivalente a la expresión . La herramienta configuración cognitiva propuesta por el EOS ha permitido evidenciar las relaciones que los profesores establecen por medio de las funciones semióticas definidas en la solución de la tarea, lo cual ha posibilitado identificar y caracterizar las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento.

6. Referencias

Chalé –Can, S (2018). Aspectos sintácticos y semánticos de la equivalencia de expresiones algebraicas en secuencias visuales (Tesis doctoral). CINVESTAV-IPN. México.

Chalé-Can, S. Font, V. y Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

D'Amore, B (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. Relime, 9(4), 177-196.

D'Amore, B y Fandiño Pinilla, M.I. (2007). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Rome, Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI, March 2008. WG5: The evolution of theoretical framework in mathematics education, organizers: Gilah Leder and Luis Radford. www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008.

Distéfano, M. L., Aznar, M. A. y Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 30, 61-80.

Distéfano, M., Pochulu, M. y Font, V. (2015). Análisis de la Complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas. REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Education, 4(3), 202-233.

Distéfano, M.L. y Pochulu, M. D. (2017). Trama de funciones semióticas en actividades de simbolización. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R.

Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algebre et le probleme cognitif de la designation des objets. Drouhard, J. & Maure, M. (Eds.). Actes des SFIDA 13-16, Vol. XIII (pp. 67-94). Nice: IREM de Nice.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.) Cali: Universidad del Valle.

Font, V, Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82, 97-124. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0.

Godino, J. D. (2002). Studying the median: A framework to analyse instructional processes in Statistics Education. In B. Phillips (Ed.), Proceedings of the ICOTS-6. CDROM. IASE.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 26 (42b), 483-512.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid: Morata.

Mejías, C. (2019). Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria (Tesis doctoral). Universidad de Girona. España.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: MEN.

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. EMA, "Una Empresa Docente" J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds). México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.

Rodríguez, G. Gil, J. y García, E. (1996). Métodos de investigación cualitativa. Málaga: Aljibe.

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. Enseñanza de las Ciencias, 33 (2), 29-49.

Rojas, P. (2012). Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. Enseñanza de las Ciencias, 33(1), 151 -165, DOI: 10.5565/rev/ensciencias.1479

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. Educational. Studies Mathematics, 77, 285-311.

Stake, R.E. (1994). Case Study, en N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.). Handbook of Qualitative Research (pp. 236-247). London: Sage.

CAPÍTULO 12

ANÁLISIS DE TAREAS DE MATEMÁTICA QUE SE PROPONEN EN UNA FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES CUANDO LAS TIC SE ESTABLECEN COMO RECURSO PRIORITARIO: UN ESTUDIO DE CASO

ANALYSIS OF MATHEMATICS TASKS THAT ARE PROPOSED IN A CONTINUOUS TRAINING OF TEACHERS WHEN ICT IS ESTABLISHED AS A PRIORITY RESOURCE: A CASE STUDY

Fabiana Montenegro[1] - Marcel Pochulu[2]
montenegrofg@gmail.com, marcelpochulu@gmail.com
[1]Universidad Nacional del Litoral,
[2]Universidad Nacional de Villa María

Resumen

El presente trabajo reporta el análisis, caracterización y valoración de dos tareas de geometría diseñadas por profesores durante una capacitación gratuita y con modalidad semipresencial, donde las TIC fueron el recurso prioritario. Para el estudio, se utilizaron los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (EOS). Se concluye que aunar los conocimientos sobre la incorporación de las nuevas tecnologías en las prácticas de enseñanza y los aportes de la Didáctica de la Matemática, contribuyen a planificar propuestas en las que se enriquece la actividad matemática de la tarea y mejora la comprensión de los estudiantes sobre los objetos matemáticos involucrados.

Palabras claves: tareas de matemática, formación continua, TIC.

Abstract

The present work reports the analysis, characterization and assessment of two geometry tasks designed by teachers during a free training in a blended mode, where ICT was the priority resource. For the study, the didactic suitability criteria were used, proposed by the onto-semiotic approach of mathematical knowledge and instruction (OSA). The conclusion is that join knowledge about the incorporation of new technologies in teaching practices and the contributions of Mathematics Didactics, contribute to planning proposals in which the mathematical activity of the task is enriched and improves the understanding of the students about the mathematical objects involved.

Keywords: *mathematical task, continuous training, ICT.*

1. Contexto de la problemática

Distintos procesos han favorecido en los últimos años la incursión de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en las aulas del nivel secundario y superior de Argentina. Entre ellos, se ubica el Programa 'Conectar Igualdad' -integrando el Plan Nacional Integral de Educación Digital- desde el 2010 proveyó de notebooks a alumnos y docentes de diferentes instituciones educativas durante seis años. Por otro lado, desde el año 2012 se iniciaron, de modo gratuito y con modalidad semipresencial, distintas especializaciones para docentes dependiendo del Ministerio de Educación y Deportes de la Nación. Entre ellas se encontraba la 'Especialización docente de nivel superior en Educación y TIC' (en adelante EDET).

Cabe preguntarse si en este contexto de integración de los nuevos recursos tecnológicos a las tareas de enseñanza de la matemática se promueven propuestas que enriquecen la actividad matemática de los alumnos y la comprensión de los objetivos involucrados o si, por el contrario, solo se fuerza el empleo de las nuevas tecnologías.

Entre los requisitos de aprobación de edet para los docentes de matemática se encontraba la elaboración de un trabajo final (TF) que consistía en una secuencia didáctica completa sobre un contenido de libre elección y su posterior defensa ante un tribunal examinador.

En este artículo se consigna el análisis de dos tareas de un TF de la mencionada especialización. Dicho análisis integra la tesis de doctorado titulada 'Caracterización de las tareas de matemática que se proponen en una formación continua de profesores, cuando las TIC se establecen como recurso prioritario'.

2. Antecedentes

Barreiro (2015) se propuso investigar cómo favorecer la integración de las TIC en la formación inicial. La investigación se llevó a cabo con estudiantes avanzados del Profesorado Universitario de Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento, en dos asignaturas referidas a la enseñanza de la matemática, entre cuyos objetivos figura que el estudiante genere y fundamente el sentido de la inclusión de las nuevas tecnologías en una propuesta de enseñanza. El trabajo fue de corte cualitativo y contempló una parte de tipo descriptiva y otra exploratoria. Consideró como punto de partida las fases de integración tecnológica de los docentes desarrolladas por Sandholtz adaptándolas a la formación inicial de profesores y a la mirada disciplinar. Además la autora enumeró diferentes criterios a tener en cuenta a la hora de valorar el uso de TIC en las tareas matemáticas.

Hernández Gómez, Briones Peñalver, Serdeira Azevedo y Medina Vidal (2016) presentan una investigación llevada a cabo en una escuela de enseñanza secundaria de la Región de Murcia (España) a partir de una muestra de 48 alumnos que cursaban 3º año de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Se ha analizado en el estudio algunas de las ventajas de la utilización e incorporación de las TIC en la educación, concretamente en el bloque Geometría Métrica. El grupo de alumnos sobre el que se aplicó la investigación se dividió en dos subgrupos con el fin de obtener datos cualitativos y cuantitativos de comparación. En uno de los grupos se desarrolló una estrategia didáctica empleando Geogebra en la enseñanza y, en el otro, se utilizó la estrategia convencional consistente en exposiciones teóricas en la pizarra y ejemplos. Concluyen que las situaciones de enseñanza se han visto favorecidas por el uso de las TIC ya que el programa mencionado favoreció la interactividad entre los alumnos, entre los alumnos y el profesor y entre los alumnos y el programa; liberó a los estudiantes de trabajos repetitivos y rutinarios permitiéndoles emplear el tiempo para afianzar los contenidos esenciales y provocando que se sientan protagonistas de lo que hacían y, por ende, de su aprendizaje.

Montecé (2017) también indagó la incidencia del *software* GeoGebra en el proceso de enseñanza – aprendizaje de estudiantes del Octavo Año de Educación Básica de la Unidad Educativa 'Nicolás Infante Díaz' de la ciudad de Quevedo (Ecuador). Para su estudio, que consistió en técnicas de observación directa y encuestas a una muestra aleatoria de 154 alumnos y 12 docentes, se propuso analizar la motivación de los estudiantes, comprobar la incidencia de las estrategias metodológicas al emplear dicho software en la enseñanza y elaborar un manual de usuario del mismo. Concluyó que GeoGebra es una estrategia innovadora, que permite a los docentes compartir contenidos matemáticos con el apoyo de la tecnología, realizando procesos en forma autónoma y propiciando un aprendizaje más significativo y participativo para los alumnos.

3. Cuestiones metodológicas

El objetivo general del trabajo que se presenta es caracterizar las tareas de matemática que se proponen en una formación continua de profesores cuando las TIC se establecen como recurso prioritario. En este sentido se han establecieron los siguientes objetivos específicos

- Explorar la coherencia entre las consignas, el contexto y los objetivos de las tareas propuestas.

- Analizar la comprensión disciplinar que fomentan las tareas presentadas en virtud de la variedad y complejidad de las relaciones entre los objetos primarios involucrados en las mismas.

- Identificar los criterios que justifican el uso de las TIC en las tareas que se presentan.

- Valorar la idoneidad epistémica de las tareas de matemática que se proponen cuando las TIC son un recurso prioritario.

De acuerdo a Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2010), Yuni y Urbano (2014) y Supo (2012) la investigación asumió las siguientes características:

- *Exploratoria* ya que se proyecta indagar en las características de las tareas que integran los TF de profesores de matemática de Argentina que finalizaron la Especialización Docente de Nivel Superior en Educación y TIC en los últimos años.

- *Descriptiva* en cuanto se propone establecer aspectos comunes de dichos TF.

- *Cualitativa* ya que está orientada a la exploración y descripción de un objeto de estudio que no se puede cuantificar.

- *Transversal* porque el número de mediciones de las variables en estudio será uno: el TF de cada docente.

- *Observacional* debido a que, como investigadora, no he tenido intervención en cada TF analizado.

Metodológicamente se tuvieron en cuenta también los siguientes constructos y herramientas definidas por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS): práctica matemática, configuraciones epistémicas y cognitivas, significados (instituciones y personales) e idoneidad didáctica. Además, en virtud del lugar destacado que el EOS le asigna a la actividad matemática, elegimos la definición de tarea propuesta por Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodriguez (2016) ya que enfatiza en el desempeño del alumno ante la propuesta de enseñanza, valora la cohesión entre consigna, el contexto y los objetivos y establece pautas para "seleccionar o diseñar tareas para cuya resolución se pueda utilizar la tecnología disponible con un uso pertinente y significativo" (p. 63)

Para cada TF presentado por los profesores se consideraron seis fases que se describen a continuación:

Primera Fase: *Establecimiento de un marco epistémico y didáctico de referencia.* Para la elaboración de este marco se recurrió a recomendaciones del diseño curricular e investigaciones y estudios específicos realizados sobre el contenido matemático de cada TF. Este marco de referencia conformó el significado de referencia que fue tenido en cuenta para el análisis y valoración de las tareas propuestas.

Segunda Fase: *Estructuración de la configuración epistémica-cognitiva de cada tarea.* Se examinó la configuración epistémica-cognitiva de las distintas tareas de la secuencia para determinar cómo se articulan los objetos primarios que se ponen en juego, si emergen o no conceptos, propiedades, procedimientos; si se busca activar procesos de argumentación, si se hace uso de diferentes tipos de lenguajes, etc.

Tercera Fase: *Análisis de coherencia entre contexto, objetivo y consigna de cada tarea.* Considerando que la actividad que realiza un alumno ante la propuesta de enseñanza del docente es clave a la hora de definir cómo enseñar matemática Barreiro *et al.* (2016) establecieron que una tarea está conformada por tres partes: una consigna, un contexto y el objetivo. El término consigna refiere a los enunciados de las actividades matemáticas que un docente plantea en clase. El contexto de una tarea lo constituyen el tipo de trabajo que viene realizando el grupo de alumnos, los contenidos previos, el momento en que se plantearía la consigna, la modalidad de trabajo (individual, grupal, etc.). Finalmente, el objetivo de la tarea es el objetivo de aprendizaje que el docente plantea y por el cual elige la consigna.

Entonces, de las resoluciones de la segunda fase se indagó la coherencia entre las tres partes que conforman una tarea, es decir, entre contexto-objetivos, objetivos-consigna y consigna-contexto.

Cuarta Fase: *Análisis del potencial matemático y actividad matemática de las tareas, que conformarán el significado institucional pretendido.* Para determinar el potencial matemático de una consigna se consideraron los indicadores que se establecen en Barreiro *et al.* (2016) y en particular, "las posibilidades de exploración que la consigna habilita o no y las posibilidades de argumentar sobre la validez de la resolución o de la respuesta" (p. 27),

Se considera valioso que la consigna de una tarea pueda admitir diferentes posibilidades de exploración y argumentación porque le permite al estudiante tomar decisiones, organizar sus intentos para afrontar la resolución, recurrir a heurísticas, reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o no, buscar la manera de explicar el porqué de la respuesta, validar las conjeturas que surgieron, etc. De este modo, el tipo de actividad que se espera realizaría un estudiante se legitima al asemejarse al trabajo del investigador matemático.

En cuanto a la actividad matemática, entendida como el desempeño, trabajo o quehacer que el estudiante realiza ante una tarea determinada, es considerada valiosa si el potencial matemático de la consigna es rico, si el docente le asigna un rol activo al estudiante y si el objetivo que se persigue es cognitivamente exigente.

Quinta Fase: *Valoración del uso pertinente y significativo que harían los estudiantes de las* TIC *en la resolución de la tarea.* Resulta sustantivo complementar el análisis de las tareas previsto a la luz de criterios para valorar el uso de nuevas tecnologías en las clases de matemática. En tal sentido, adoptamos los criterios elaborados por Barreiro (2015) para un uso pertinente y significativo de las TIC y que aparecen en un capítulo de Barreriro *et al.* (2016). Estos principios están alineados con los enfoques constructivistas en educación matemática ya que ponen la atención en la actividad genuina de trabajo por parte del alumno guiado por un docente que diseña y coordina tareas. Por ello, la autora hace referencia a un uso pertinente –en el sentido de que sea oportuno el uso de las TIC y no sólo por obligación – y significativo aludiendo a que el alumno aprenda algo valioso para esta disciplina.

Dichos criterios son: favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas, imprescindibilidad de las TIC, no perder de vista el objetivo matemático, incluir distintos usos de TIC, complementariedad de las TIC como un recurso más de la clase, libertad para apelar a las TIC, libertad de selección de cuál recurso tecnológico utilizar.

También se adopta, en esta fase, el modo en que Barreiro (2016) considera los criterios mencionados de acuerdo al *status* que tienen:

- Si la tarea no cumple el criterio de la imprescidibilidad (el segundo de la lista anterior) la valoración de la significatividad es negativa y si no cumplen el criterio de no perder de vista el objeto matemático (el tercero) se considera que el uso de TIC no es pertinente. Si alguno de los dos criterios y/o los dos no se cumplen, termina el análisis y se argumenta la valoración negativa a partir de la ausencia de ellos.

- Si ambos criterios se cumplen, se analiza el cumplimiento de cada uno de los restantes y su presencia justifica, aún más, la valoración positiva.

Cabe mencionar, además, que los criterios 4 y 5 son más razonables de considerar en una secuencia didáctica completa que en tareas particulares.

Sexta Fase: *Valoración de la idoneidad epistémica de las tareas.* La valoración cualitativa de las tareas se realizó teniendo en cuenta el marco epistémico y didáctico de referencia establecido en la Primera Fase (significado de referencia), el significado pretendido que fue determinado mediante el análisis de las áreas en la Segunda Fase y los criterios de idoneidad epistémica que propone el EOS (Godino 2011, 2013).

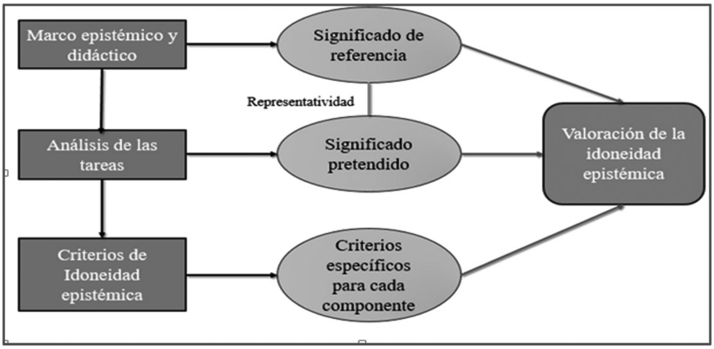


Figura 1. Valoración de la idoneidad epistémica
Fuente: Jiménez Consuegra, 2018, p. 27

La siguiente imagen visibiliza el empleo de los constructos mencionados en cada fase de investigación

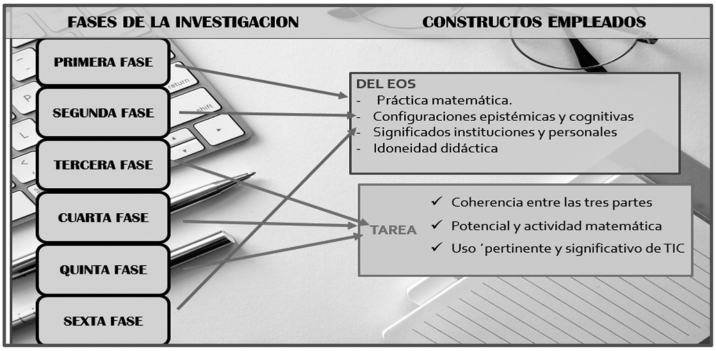


Figura 2. Interrelación Fases de la investigación - Constructos empleados

4. Análisis y discusión

En este apartado se presenta el análisis de dos tareas de un TF planificado en tres encuentros para alumnos de primer año de la escuela secundaria de Argentina (13-14 años) y que lleva como título "Triángulos: propiedades de los lados y de los ángulos internos de un triángulo". Las tareas, que a continuación se presentan, pertenecen al segundo de los encuentros. Por una cuestión de espacio se omite el análisis que deriva de la primera fase de la investigación.

Se han elegido estas tareas porque la incorporación de recursos de enseñanza provenientes de la tecnología hace pensar que se han superado las desventajas del modelo tradicional de enseñanza. Sin embargo, al usar las herramientas y constructos del EOS, se ponen de relieve aspectos que podrían pasar desapercibidos y que permiten al docente problematizar y mejorar el diseño de las tareas a proponer en el aula.

Actividad 1: "Todos los triángulos tienen al menos dos ángulos interiores agudos". Verifica con tu compañero de banco si la afirmación es verdadera o falsa midiendo los ángulos interiores de los triángulos obtenidos en la actividad de la clase 1 con el programa GeoGebra. Luego responde:

a. Cuando un triángulo es obtusángulo sus ángulos interiores ¿cómo son?
b. ¿Y cuándo es rectángulo?

Actividad 2: Construye un triángulo acutángulo, un triángulo rectángulo y otro obtusángulo en el programa GeoGebra, luego mide el valor de sus ángulos. En otra hoja repite la actividad pero construyendo un triángulo equilátero, un isósceles y otro escaleno.

Como actividad de cierre la docente propone a los grupos de alumnos sumar los ángulos interiores de cada triángulo construido con la calculadora científica o en su defecto, la calculadora del celular. Luego les propone redactar una oración que demuestre lo analizado (Velo, 2015, p. 4 y 5)

Segunda fase

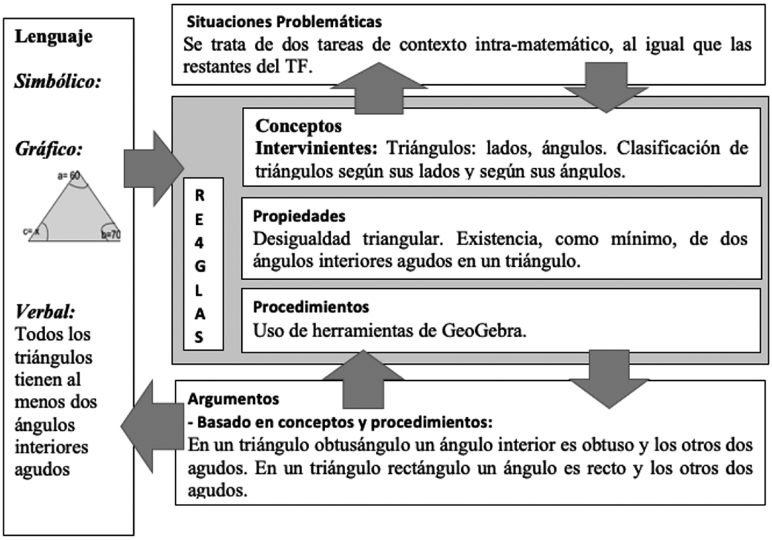


Figura 3. Configuración epistémica-cognitiva de las Actividades 1 y 2
Fuente: Velo, 2015

Tercera Fase: Durante este encuentro el contexto es favorable ya que la metodología de trabajo favorece el intercambio y la discusión con un compañero y se cuenta con los saberes matemáticos previos sobre la clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos. Sin embargo, algunas de las consignas de este encuentro requieren más que el manejo básico de GeoGebra. Construir un triángulo rectángulo o equilátero con un software, demanda que el alumno ponga en juego conceptos geométricos -como la perpendicularidad y la construcción de un triángulo conocidos sus lados- a fin de elegir las herramientas y comandos apropiados. La observación que aparece entre los saberes previos requeridos en relación con las TIC "Conocimiento de los comandos del software GeoGebra (se podría compensar con la guía del docente)" (Velo, 2015, p.2) deja entrever que los alumnos no disponen de la necesaria experiencia con el *software*. Por lo tanto, la coherencia Consignas-Contexto es intermedia.

En cuanto a los objetivos de la secuencia uno de ellos es "Enunciar y demostrar las propiedades de los ángulos internos de los triángulos" (Velo, 2015, p.1). Sin embargo, las consignas de las Actividades 1 y 2 atienden solo a la enunciación de la propiedad y no a su demostración. A través de la medición de la amplitud de los ángulos de diferentes triángulos, los alumnos constatan la veracidad de la propiedad sobre la existencia de, como mínimo, dos ángulos interiores agudos en todo triangulo. Empero, desde la matemática, verificar y demostrar son procesos distintos. En consecuencia, la vinculación Consignas-Objetivos es también mejorable.

Ya se mencionó que, en el objetivo indicado, se distinguen dos intenciones relacionadas con las propiedades que satisfacen los ángulos de un triángulo: enunciarlas y demostrarlas. Atendiendo que la secuencia está pensada para alumnos de primer año de la escuela secundaria, podría suponerse que los alumnos no disponen de las condiciones para desarrollar un tratamiento deductivo como el que demanda una demostración matemática.

Itzcovich (2005) brinda una alternativa para superar el aparente dilema entre la edad de los alumnos y el rigor matemático de las propuestas de clase. En dicho texto se presentan tres demostraciones referidas a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. La primera se trata de una constatación empírica y, como no se recurre a ninguna propiedad geométrica, no da certeza de que el resultado podría haber sido otro y se pierde la perspectiva del alcance general que tiene una propiedad matemática. La segunda es una demostración formal en la que cada paso intermedio se justifica empleando propiedades y definiciones de las cuales se deduce la necesariedad del resultado obtenido. La tercera de las demostraciones, que también resulta de un proceso deductivo, "da por sentada propiedades cuya validez es aceptada en función de suponer que los alumnos disponen de ellas, aunque no se conozca bien el proceso por el cual dichas propiedades adquirieron el estatuto de tales" (Itzcovich, 2005, p. 47).

Priorizar las condiciones que permiten conectar al alumno con el razonamiento deductivo y no alejarlos de la posibilidad de que sean ellos mismos quienes produzcan conocimiento matemático a través de argumentaciones lógicas, conduce a evaluar que la vinculación Objetivos-Contexto en este encuentro no es la óptima.

Cuarta Fase: El potencial matemático de las consignas de las Actividades 1 y 2 es pobre. Es posible mencionar dos aspectos que evidencian las limitadas posibilidades de exploración que las mismas ofrecen. Por un lado, porque construir y medir con GeoGebra y efectuar cálculos con calculadora son propuestas que puntualizan el modo de resolución de la actividad matemática y los instrumentos a emplear. Y, por otro, porque, las consignas mencionan explícitamente la propiedad a analizar. Y, en cuanto a las posibilidades de argumentación sobre la validez de las resoluciones o de las respuestas, directamente no están consideradas.

La actividad matemática de las tareas también es reducida porque el pobre potencial matemático de las consignas desdibuja el protagonismo del alumno. Tal como se menciona en Pochulu (2018) el hecho de que la consigna admita diferentes posibilidades de exploración y argumentación fortalece el accionar del estudiante para la toma de decisiones, la organización y reflexión de los intentos de resolución, el uso de heurísticas, la búsqueda de demostración de sus conjeturas, etc.

Los objetivos de aprendizaje podrían haber sido matemáticamente más exigentes si se solicitaba la argumentación sobre la veracidad de la propiedad mencionada en la Actividad 1. Al respecto uno de

los riesgos que se mencionan en Barreiro *et al.* (2016) al admitir el uso de tecnologías en las consignas matemáticas es que los alumnos se convencen de la validez de alguna cuestión porque una pantalla lo muestra y no se cuestionen si existen o no fundamentos disciplinares de lo que observan. Aunque en las actividades de validación en los primeros años de la escolaridad secundaria estén presentes las justificaciones incompletas, las argumentaciones imprecisas y las escrituras poco formales "interesa iniciar al alumno en esta actividad característica de la disciplina, sin pretender desarrollarla tal como se exige en Matemática" (Montenegro y Nagel, 2011, p 23).
Quinta Fase: En este encuentro se plantea el uso de GeoGebra en las *netbooks* de los alumnos. Aunque las tareas con este *software* estuvieron enfocadas en el conocimiento matemático previsto, su uso no resulta indispensable puesto que las construcciones y mediciones pueden realizarse con regla y transportador. Por ende, la inclusión de recursos tecnológicos en este encuentro no es significativo.

Resulta oportuno recordar que "para los que se inician en geometría, una gran dificultad es la de evitar la confusión entre los objetos geométricos, que son conceptos, y sus representaciones que son figuras dibujadas materialmente" (Berté, 1999, p.75) y que el verbo construir no tiene el mismo sentido para alumnos - para quienes construir es sinónimo de dibujar - que para docentes. Así, se puede dibujar con un *software* un cuadrilátero con apariencia de cuadrado o, efectivamente, construir un cuadrado. Y, precisamente, la diferencia entre una figura dibujada o construida reside en haber puesto en juego herramientas del software que se corresponden con propiedades geométricas o no haberlo hecho. No hay indicios en la Actividad 2 de Velo (2015) que manifiesten si se atendió a esta diferenciación al construir, por ejemplo, un triángulo equilátero.

Sexta Fase: Considerando el marco epistémico y didáctico de referencia, el significado pretendido y los criterios de idoneidad epistémica de Godino (2011, 2013) y Ramos y Font (2008) se concluye que

Tabla 1 Componentes, indicadores y valoración de idoneidad epistémica

Componentes	INDICADORES	Valoración
Situaciones-problemas	Las actividades 1 y 2, al igual que las restantes tareas del TF, son intra-matemáticas y corresponden a una muestra reducida de las situaciones de referencia relacionadas con las propiedades de los ángulos interiores de un triángulo. No se presentan momentos de generación de problemas.	Baja
Lenguajes	Las consignas y el cierre del encuentro favorecen el uso del lenguaje verbal. El lenguaje gráfico emerge de las construcciones con GeoGebra. Como las tareas están vinculada con procedimientos como medir, dibujar, sumar, etc., no se promueve el uso del lenguaje simbólico.	Intermedia-Baja
Reglas (definiciones, propiedades, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos son claros, correctos y adaptados al nivel educativo de los alumnos, aunque no son representativos de los que se identifican en el significado de referencia. Faltan instancias de elaboración de conjeturas y de argumentación, procedimientos que enriquecen el aprendizaje de la matemática.	Intermedia-Baja
Argumentos	La constatación aritmética midiendo ángulos de triángulos particulares y sumándolos, no constituye una demostración de la propiedad referida a la existencia de, al menos, dos ángulos interiores agudos en un triángulo, sino una verificación. Además, la argumentación de la validez dicha propiedad está basada en lo que devuelve GeoGebra y la calculadora y no en la matemática misma.	Baja
Relaciones	Los objetos primarios de la configuración epistémica-cognitiva de las tareas (Figura N°3) se relacionan entre sí, aunque no se identifican los diversos significados posibles de los objetos vinculados con el contenido de referencia.	Intermedia-Baja

En la Figura 4 se representa mediante pentágonos la idoneidad epistémica de la Actividades 1 y 2 de Velo (2015). Mientras que el pentágono regular representa el grado máximo de desarrollo de los objetos primarios que intervinieron en ella, el pentágono irregular interno corresponde al desarrollo efectivamente logrado.

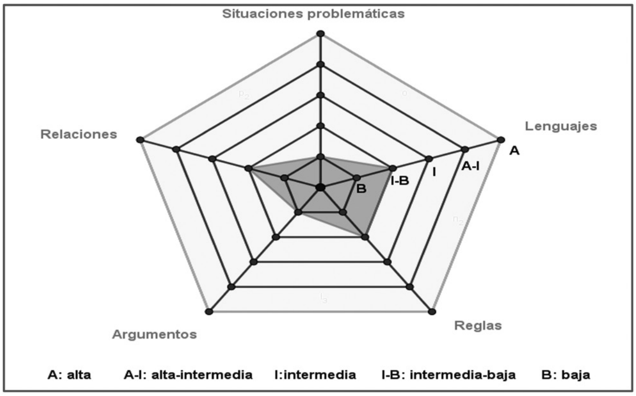


Figura 4. Idoneidad epistémica de las Actividades 1 y 2
Fuente: Velo, 2015

5. A modo de cierre

El análisis presentado evidencia que los constructos del EOS constituyen herramientas que permiten efectuar análisis didácticos a priori de tareas matemáticas planificadas por docentes en ejercicio y, así, avanzar hacia una didáctica orientada a la mejora progresiva de la enseñanza de la matemática.

Además, se han mencionado otros aportes provenientes de la Didáctica de la Matemática que posibilitan repensar algunas tradiciones provenientes de décadas anteriores sobre la enseñanza de la geometría en el nivel secundario.

Aunar los conocimientos sobre la incorporación de las nuevas tecnologías en las prácticas de enseñanza a los aportes de la Didáctica de la Matemática contribuye a la planificación de propuestas de instrucción en las que se enriquece la actividad matemática de los alumnos y la comprensión de los objetivos disciplinares involucrados.

Referencias

Barreiro, P. (2015). Fases de integración de nuevas tecnologías en la formación de profesores de Matemática. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén: Argentina.

Barreiro, P.; Leonian, P.; Marino, T.; Pochulu, M. y Rodriguez, M. (2016). Criterios para valorar el uso de nuevas tecnologías en la clase de Matemática. En M. A. Rodríguez (Coord.) Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática. Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS.

Berté, A. (1999). Matemática dinámica. Buenos Aires, Argentina: A-Z Editora.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema 32* (60). 255-278.

Breda, A. y Lima, V. M. (2016). Estudio de Caso sobre el Análisis Didáctico Realizado en un Trabajo Final de un Máster para Profesores de Matemáticas en Servicio. *Redimat 5* (1), 74-103.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En A. Ruiz (Presidencia), *XIII Conferencia Interamericana de Educacao Matemática (CIAEM-IACME)*. Conferencia llevada a cabo en Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 11*, 111-132.

Hernández Gómez, E.; Briones Peñalver, A.J.; Serdeira Azevedo, P. Medina Vidal, F. (2016). Geogebra y TIC en Matemáticas de enseñanza secundaria. *Anuario de Jóvenes Investigadores* 9, 212-215.

Jiménez Consuegra, M. A. (2018). *Idoneidad epistémica de tareas sobre cálculo de áreas de figuras compuestas en textos de secundaria* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Montenegro, F. y Nagel, M. (2011). *Geometría y funciones con el entorno GeoGebra en la Escuela Media'*. Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina. ISBN 978-987-657-661-1.

Pochulu, M. (2018). Prólogo. En M. Pochulu (Comp). *La Modelación en Matemática: marco de referencia y aplicación*. Villa María, Córdoba: Universidad Nacional de Villa María.

Ramos, A. B. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (2), 233-265.

Supo, J. (2012) Seminarios de Investigación Científica (Audiolibro). Perú: Sociedad Hispana de Investigadores Científicos.

Velo, F. (2015). *Triángulos: propiedades de los lados y de los ángulos internos de un triángulo*. Trabajo Final de la Especialización docente de nivel superior en Educación y TIC. Ministerio de Educación de la Nación y Deportes de Argentina.

Yuni, J. y Urbano, C. (2014). Técnicas para Investigar Recursos Metodológicos para la Preparación de Proyectos de Investigación. Volumen 1. Córdoba, Argentina: Brujas.

CAPÍTULO 13

ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DE UN PROFESOR EN LA ENSEÑANZA DE DERIVADAS PARA INGENIERÍA EN EL PERÚ

ANALYSIS OF THE PROFESSOR'S PRACTICE IN THE TEACHING OF DERIVATIVES FOR ENGINEERING IN PERU

Walmer Garcés-Córdova, Vicenç Font-Moll
wgarcec07@alumnes.ub.edu, vfont@ub.edu
Universitat de Barcelona

Resumen

Este estudio tiene como objetivo, determinar los criterios que orientan la práctica de un grupo de profesores en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería y, en concreto, para explicar derivadas. Es una investigación cualitativa de estudio de caso que busca comprender la enseñanza de las matemáticas, a través del análisis de las prácticas de los participantes y de la reflexión sobre su práctica. Para ello, se videograbaron las clases de un grupo de profesores y se infirieron los criterios que siguen en el diseño e implementación de éstas, utilizando los criterios de idoneidad didáctica; luego se seleccionó a uno de ellos como estudio de caso, y después se realizó una triangulación entre lo que dice y lo que hace. Se encontró que este profesor guía su práctica docente por aspectos del criterio ecológico

(sílabo y profesión), interaccional (interacción con los estudiantes) y mediacional (tiempo disponible para las clases).
Palabras clave: *reflexión sobre la práctica, criterios de idoneidad didáctica, enseñanza de derivadas, enseñanza y aprendizaje en ingeniería.*

Abstract

This study aims to determine the criteria that guide the practice of a group of professors in Peru to explain mathematics in a course of basic sciences in engineering careers and, in particular, to explain derivatives. It is a qualitative case study research that seeks to understand the teaching of mathematics, through the analysis of participants' practices and reflection on their practice. To this end, the classes of a group of professors were filmed and the criteria that follow in the design and implementation of the classes were inferred, using the criteria of didactic suitability; then one of them was selected as a case study, and then a triangulation was made between what he says and what he does. It was found that this professor guides his teaching practice by aspects of ecological criteria (syllabus and profession), interactional (interaction with students) and mediational (time available for classes).

Keywords: *reflection on practice, criteria of didactical suitability, derivatives teaching, teaching and learning in engineering.*

1. Antecedentes

La enseñanza de las matemáticas para ingeniería se ha relacionado con la siguiente disyuntiva: unas matemáticas específicas para cada ingeniería, o bien, unas matemáticas más generales que se enseñan en los primeros ciclos y comunes a varias ramas de esta. En el siglo XX la estructura más habitual era que las ingenierías se organizasen mediante la creación de un ciclo inicial o de estudios generales, que se supone suministra a los futuros ingenieros las herramientas matemáticas básicas que luego van a aplicar en otras asignaturas de la carrera y, después en su desempeño profesional.

Después de aproximadamente un siglo de organizar las carreras de ingeniería con un ciclo de ciencias básicas, han surgido dudas sobre si ésta es, o no, la mejor opción. Algunos de los dilemas más importantes sobre el papel de las ciencias básicas (y en particular, las matemáticas) en las ingenierías se relacionan con los siguientes aspectos (Font, 2019): **1)** el cuestionamiento de que un conocimiento general de base sea fácilmente aplicado a diferentes contextos; **2)** el alto número de alumnos reprobados; **3)** la presentación de contenidos que después en la práctica no se utilizan; y **4)** el enfoque actual que pone énfasis en una enseñanza que desarrolle competencias. Como respuesta a estos dilemas, a los que se enfrentan los ciclos de estudios generales en ingeniería, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias y conocimientos de los profesores de matemáticas y, también, sobre cómo es la enseñanza de las matemáticas en estos ciclos.

Sobre la enseñanza del cálculo diferencial e integral en las carreras de ingeniería en el Perú, hay un cierto consenso difuso en las siguientes afirmaciones: **a)** los alumnos tienen muchas dificultades para su aprendizaje, **b)** estas dificultades, entre otros factores, se deben o bien a que la enseñanza está centrada en una presentación netamente algorítmica de aprendizaje de fórmulas, mecanicista y rutinaria, o bien, a una enseñanza muy rigurosa y formalista, **c)** la enseñanza se realiza obviando la comprensión significativa de las nociones básicas del cálculo, lo que dificulta que el futuro ingeniero utilice las matemáticas para resolver problemas de su profesión. Debido a insuficientes investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas en los ciclos de ciencias básicas de ingeniería en el Perú, concluimos que son necesarios estudios que informen sobre dicha situación. En esta investigación nos proponemos responder la pregunta: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica del profesor en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería? Para ello usaremos la noción de derivada como contexto de reflexión.

2. Objetivo de Investigación

El Objetivo general es, determinar los criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería. En particular, cuando explican la derivada.

3. Marco Teórico

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, EOS en adelante, (Font, Planas y Godino, 2010; Godino, Batanero y Font, 2007 y 2019) dentro de las configuraciones didácticas, considera cinco tipos de análisis sobre los procesos de instrucción: **1)** Identificación de prácticas matemáticas; **2)** Elaboración de configuraciones de objetos y procesos matemáticos; **3)** Análisis de trayectorias e interacciones didácticas; **4)** Identificación del sistema de normas y metanormas; y **5)** Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. El primer tipo de análisis explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción matemático. El segundo, se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. El tercero, está orientado a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas; las configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas, que es el cuarto tipo de análisis didáctico. El quinto tipo, se basa en los cuatro análisis didácticos previos y en la noción de idoneidad didáctica.

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado), para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta los recursos disponibles (entorno). Los criterios de idoneidad didáctica (CID) pueden ser de utilidad para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para valorar su implementación (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Este constructo multidimensional se descompone en seis criterios de idoneidad parcial: **1)** Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son "buenas matemáticas"; **2)** Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; **3)** Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; **4)** Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y, **6)** Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

Para la operatividad de los CID se define un conjunto de componentes e indicadores observables que sirven de guía para el análisis y valoración de un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa (Breda, Pino-Fan y Font, 2017). En la Tabla 1 se detallan, a continuación, estos criterios y componentes de idoneidad didáctica (por falta de espacio no se especifican los indicadores).

Tabla 1. *Criterios y componentes de idoneidad didáctica* (Fuente: Morales-López y Font, 2019, p. 5)

Criterio	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectivo o emocional	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

4. Metodología

Esta investigación corresponde a un estudio con un enfoque interpretativo de corte cualitativo (Bisquerra, 2009), que busca comprender y describir la enseñanza de las matemáticas en el ciclo básico de las ingenierías. Desde el punto de vista de la extensión, se trata de un estudio de caso de un profesor, cuando imparte derivadas en los primeros ciclos de ingeniería. Para determinar las consideraciones implícitas en la ejecución de las tareas del profesor se ha considerado los siguientes pasos:

1) Se seleccionó a un grupo de 10 docentes que enseñan matemáticas en ingeniería (ocho graduados en matemáticas y dos en educación con mención en matemática) y se les solicitó su consentimiento para registrar el desarrollo de sus clases sobre derivadas y sus aplicaciones, en videograbaciones; **2)** Se recopiló, para su análisis, documentos curriculares (sílabos), planes de clase, presentaciones del tema, separatas de ejercicios, material de consulta para los alumnos, entre otros; **3)** Se videograbaron las sesiones desarrolladas por estos docentes (entre dos y tres clases según el profesor); **4)** Se diseñó un cuestionario de 46 preguntas, basado en los CID, para la entrevista semiestructurada, el mismo que se aplicó a los 10 docentes; **5)** Se realizó un análisis experto de las clases videograbadas con los cuatro niveles del modelo de análisis didáctico propuesto en el EOS, tal como se hace en Breda, Hummes, da Silva y Sánchez (2021) y en Pochulu y Font (2011), para determinar las prácticas, objetos y procesos matemáticos, funciones del profesor y del alumno, configuraciones didácticas, conflictos semióticos, patrones y normas; **6)** Para este reporte se ha seleccionado como estudio de caso a uno de los profesores, que le denominamos Docente B, al mismo que se le hizo la entrevista para determinar los criterios que, según él, orientaban su práctica pedagógica; **7)** Se realizó la transcripción literal de la entrevista videograbada; **8)** Se analizó el contenido de la entrevista para determinar los criterios que según el profesor orientan su práctica, y luego se triangularon las fuentes para inferir resultados.

5. Resultados: Estudio de caso del profesor B

Para este docente, se han analizado y sintetizado los criterios que declara seguir, en la entrevista docente, criterios que fueron triangulados con las observaciones de tres de sus clases videograbadas en aula, donde explicó el tema de derivadas y sus aplicaciones (ver Tabla 2).

Tabla 2. *Análisis de las respuestas dadas por el Docente "B" en la entrevista y triangulación con lo observado en clase.*

ID	COMPONENTE	RESPUESTA DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Preguntas generales	Formación inicial Criterios al diseñar e implementar clases	• Ha obtenido bachillerato y licenciatura en Matemáticas, maestría en Enseñanza de las Matemáticas y es doctorando en Educación; tiene experiencia como profesor y coordinador de asignaturas de matemáticas en universidades privadas, y ha realizado diplomados y cursos cortos de formación permanente. • Estructura y rigor de los objetos matemáticos y de los materiales de estudio; trabajo en equipo y autoaprendizaje; buen clima en el aula; uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas; y la relación del tema matemático con el contexto y la especialidad de los estudiantes.	• Asumimos que sí está en posesión de los grados y títulos académicos que señala, además de ser un profesor con amplia experiencia y estar en constante actualización. • Se evidencia que sí tiene en cuenta en cierta manera los criterios que afirma seguir (inicia la sesión recuperando saberes previos; genera buen clima con los estudiantes; hace trabajar en equipos; hace uso de la tecnología en sus clases; los objetos matemáticos y materiales están correctamente presentados; e intenta relacionar el tema con el contexto y la carrera de los estudiantes)
	Modelo de docente	• Se considera un docente constructivista ya que trata de que el alumno genere su propio conocimiento, así como, afirma ser un docente que desarrolla unas matemáticas realistas puesto que busca propuestas y aplicaciones cercanas al estudiante	• Si bien, hace participar a los alumnos en todo momento, sigue siendo una clase magistral y de transmisión del conocimiento. No se evidencia que ejecute matemáticas realistas y del contexto del estudiante (el modelo que afirma seguir no se corresponde con lo observado)

ID	COMPONENTE	RESPUESTA DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Epistémica	Errores	Acepta que comete errores matemáticos por apresuramiento o por cumplir con los temas del sílabo (aunque confunde un error matemático con error didáctico).	Se observa que no comete errores matemáticos en sus explicaciones sobre derivadas en sus clases videograbadas
		Busca que el rigor matemático esté presente en sus clases pero a nivel básico. Considera que la intuición y el rigor están entrelazados y que con explicaciones intuitivas los alumnos asimilan de forma práctica y sencilla los procesos de solución.	En efecto, el rigor matemático que le imprime a la derivada en sus clases, es a nivel básico; además, se evidencia que utiliza la intuición constantemente en sus explicaciones conectando la derivada con aspectos cotidianos para los estudiantes.
	Ambigüedades	Afirma que las demostraciones en la enseñanza de la derivada en ingeniería son importantes, pero deben ser básicas, por ello sólo hace dos demostraciones; luego provee a los alumnos la lista de reglas básicas de derivación para que las manipulen, se familiaricen y las apliquen.	Efectivamente, vemos que hace un par de demostraciones iniciales y luego entrega a los alumnos, en la pizarra, un listado de fórmulas y reglas básicas de derivación, indicándoles que se cumplen y se tienen que aplicar
		Se centra en la resolución algebraica de ejercicios de derivadas, dejando poco espacio para la resolución de problemas extramatemáticos.	En efecto, se aprecia que en sus clases enfatiza la aplicación de reglas y fórmulas en la resolución algebraica y algorítmica de ejercicios intramatemáticos de derivadas. Se observa que hay carencia de procesos matemáticos relevantes como la argumentación y la modelización.
	Riqueza de Procesos	Trabaja ciertos procesos relevantes de la actividad matemática, pero no la argumentación ya que afirma que no se evalúa en los exámenes; y la modelización, la trabaja si es que le alcanza el tiempo en las clases.	Se observa que en sus explicaciones hace uso de diferentes significados de la derivada, y que empieza definiéndola como pendiente de recta tangente a una curva y después como velocidad instantánea
		Considera que es importante que el alumno tenga una visión amplia de los diferentes significados de la derivada, por lo que en sus clases define la derivada como pendiente de recta tangente y como consecuencia de ello, también la define como velocidad instantánea.	Efectivamente, vemos que en la mayor parte del tiempo de las clases resuelve ejercicios del contexto intramatemático, de tipo procedimental y de aplicación de propiedades de derivación.
	Muestra representativa de la pluralidad de significados del objetivo matemático a enseñar	Los problemas de derivadas que plantea son, en su mayoría, del contexto intramatemático; menciona además, que en sus clases ha incidido en cuestiones procedimentales y en la aplicación de las propiedades de la derivada.	En efecto, en las tres clases que fueron observadas vemos que solo ha desarrollado un problema contextualizado, ya que ha priorizado los ejercicios algebraicos.
			Se observa que en sus explicaciones de derivadas y sus aplicaciones, usa diversos modos de expresión, su conversión y tratamiento. Y también utiliza diferentes representaciones de la derivada

ID	COMPONENTE	RESPUESTA DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Epistémica	Muestra representativa de la pluralidad de significados del objetivo matemático a enseñar	Opina que en las clases se deben presentar problemas variados de derivadas y de sus aplicaciones; sin embargo, dice que aquellos problemas que él trabaja son escasos y sólo del contexto de la Física. En sus clases dice que utiliza diversos modos de expresión y su respectiva conversión entre éstos, así como, la representación gráfica y analítica de la derivada, ya que le permite abarcar diferentes formas de aprendizaje. Considera que el sílabo de la asignatura determina los contenidos de derivadas que imparte; en cuanto a la forma de enseñarlos, él pone su propio aporte. Opina que se debería dosificar el sílabo dado que está muy denso, además agregar modelos ligados a la ingeniería.	Se evidencia que el docente se rige por el sílabo y el plan de sesión en la implementación de sus clases; aunque también pone su estilo personal y no solamente se basa en las presentaciones que le proporciona la coordinación.
Cognitiva	Conocimientos previos	Trata de recuperar los conocimientos previos de los alumnos cada vez que va a iniciar un nuevo tema. En el caso de que éstos no contaran con dichos saberes, lo que hace es retomar el tema, los motiva e indica que la derivada está presente en todos los fenómenos Espera lograr que la distancia entre lo que los alumnos ya conocen y los nuevos contenidos de derivadas que pretende enseñar, sea alcanzable; aunque reconoce que es complicado conseguirlo. Hace lo posible por atender la diversidad de estudiantes en el aula, así como los distintos ritmos de aprendizaje; para lo cual identifica quiénes tienen mayor dificultad en el aprendizaje de las derivadas y a ellos dirige las actividades de ampliación y refuerzo. La manera de asegurarse que los estudiantes hayan aprendido los conceptos de derivada que ha enseñado, es cuando éstos están en la capacidad de discutir	Aunque no se evidencia que aplique alguna evaluación inicial para averiguar saberes previos de los alumnos, vemos que sí trata de recuperar ciertos conocimientos previos y conectar el nuevo tema con los anteriores. Se observa que presenta contenidos de derivadas y sus aplicaciones que están en la zona de desarrollo próximo (ZDP) de los alumnos, y que son accesibles para ellos Efectivamente, vemos que ante las dudas y dificultades de los estudiantes, se les acerca y trata de atenderlos de forma personalizada, los guía y refuerza en sus procedimientos y en la resolución de los ejercicios, y despeja las dudas. No hay evidencias en las clases videograbadas de que haya fomentado discusiones sobre conceptos de derivadas que ha enseñado. Aunque vemos que cuando un alumno no entiende algún aspecto procura explicárselo a toda la clase

ID	COMPONENTE	RESPUESTA DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Cognitiva	Aprendizaje	un concepto o cuando son capaces de abordar y resolver un problema que les plantea. Los instrumentos de evaluación que usa son pruebas de desarrollo (exámenes parciales, finales y prácticas calificadas) que en su opinión le informan, mínimamente, de las dificultades de aprendizaje de los alumnos. Por lo que dice que le asigna más valor a las evaluaciones permanentes que él aplica.	En efecto, se evidencia que las evaluaciones de mayor peso son pruebas sumativas de desarrollo comunes a varias aulas; pero que también hace valoraciones del desempeño de los estudiantes en clases.
	Alta demanda cognitiva	La forma de darse cuenta de que los alumnos no están asimilando bien los conceptos que está enseñando, es cuando pregunta y éstos no le responden de manera adecuada. Entonces, recapitula el tema y vuelve a explicarlo buscando la mayor participación de la clase. Afirma que las tareas que propone a los estudiantes ya le entregan elaboradas de la coordinación de asignatura y tiene que cumplir; son ejercicios de derivadas que priorizan la manipulación algebraica, procedimental y de solución inmediata, por lo que, en su opinión, no activan en los estudiantes procesos cognitivos relevantes Se esfuerza por mostrar a los estudiantes que no todo en el tema de las derivadas es conceptual, sino que en la presentación del tema hay un cierto orden, claridad y secuenciación que, en su opinión, es medianamente adecuada.	Observamos que si identifica que no está habiendo aprendizaje en sus clases, vuelve a hacer explicaciones puntuales del tema, se acerca al estudiante y busca mayor participación de ellos en el desarrollo de la derivada Efectivamente, vemos que trabaja con una guía de tareas que es común para todos los grupos en la cual se proponen, sobre todo, ejercicios algebraicos para mecanización y de aplicación de reglas y fórmulas. Son tareas que fomentan lo procedimental y no exigen alta demanda cognitiva. Efectivamente, vemos que hace un esfuerzo para que sus explicaciones sean entendibles para los estudiantes; se observa que el desarrollo de las clases en la pizarra es ordenado, hay claridad y los temas son secuenciales
Interaccional	Interacción docente-discente	Sostiene que en sus clases interactúa bastante con los estudiantes a través de preguntas, y también les pide que le comuniquen y expresen sus dudas sobre el tema; una vez que ha identificado las dificultades de aprendizaje de éstos, los atiende, trata de sacarlos a la pizarra y trabajar para esclarecerlas.	Notamos que en las clases hay una mediana interacción con los estudiantes, vemos que el docente recorre el aula atendiendo las dudas, hace preguntas y repreguntas sobre la derivada y que saca a la pizarra a algunos de ellos pero de manera voluntaria. Se aprecia que utiliza una variedad de recursos

ID	COMPONENTE	RESPUESTA DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Interaccional	Interacción entre discentes	Hace uso de diversos recursos argumentativos como la explicación magistral y metáforas para implicar y captar la atención de los alumnos en la clase de derivadas. Además, procura que los alumnos participen de manera homogénea varones y mujeres, los que saben más y los que menos conocen. Procura generar el diálogo y la comunicación entre los estudiantes y para lograrlo forma equipos o trabaja en pares, pero reconoce que han sido muy escasos esos momentos por falta de tiempo.	argumentativos para sus explicaciones de las derivadas; aunque sigue siendo una clase expositiva con algunas participaciones de los alumnos desde sus asientos o salidas a la pizarra, pero no explican lo que han desarrollado.
	Autonomía	Propicia actividades de trabajos grupales para que los alumnos exploren, formulen y validen sus conjeturas sobre la derivada, pero a veces ha tenido que cortar esta actividad por falta de tiempo.	Observamos que el desarrollo de las clases es básicamente expositiva, por lo que se evidencia escasos momentos de diálogo y comunicación entre los estudiantes
	Evaluación formativa	Además, en este trabajo de equipos ha generado momentos para la autonomía y el autoaprendizaje de los estudiantes Fomenta la interacción con los estudiantes en la mayor parte de sus clases, en las exposiciones, en las preguntas y en las respuestas que dan. Es ahí donde observa si el aprendizaje de los alumnos se está dando, por lo que siempre está pendiente de los procesos de aprendizaje, de quiénes aprenden y quiénes se retrasan.	En las clases videograbadas no se han observado trabajos grupales, aunque deducimos que en otras clases sí lo hace para resolver los talleres que tienen una nota para los estudiantes, y ahí ellos trabajan de manera autónoma. Aunque hay pocos momentos para la autonomía. Aunque en las clases observadas no han habido exposiciones, vemos que sí formula preguntas y repreguntas a los estudiantes, está pendiente y atento del aprendizaje de éstos y observa sus resoluciones. Por tanto, vemos que genera cierta interacción con los alumnos.
Mediacional	Recursos materiales	Geogebra online en sus clases de derivadas, ya que le permiten hacer una presentación dinámica, manipular los objetos matemáticos, y están disponibles en línea. Utiliza software como Cabri y Considera que trabajar con grupos de más de 40 estudiantes es muy complicado, ya que no puede	En efecto, observamos que en clases hace uso del geogebra online en sus clases de derivadas para que los estudiantes visualicen la precisión las gráficas de las funciones Efectivamente, apreciamos que en sus clases hay una cantidad considerable de estudiantes por lo que no se da abasto para atender a todos.

ID	COMPONENTE	RESPUESTA DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Mediacional	Recursos materiales	discutir adecuadamente las derivadas y que ellos puedan asimilarlas.	Se observa que las aulas sí presentan condiciones adecuadas, aunque las pizarras son pequeñas y opacas, pero hay suficiente espacio para el trabajo en equipos.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	Reconoce que en general el aula de clases sí es adecuada para desarrollar su enseñanza de las derivadas; sin embargo, sugiere que algunos elementos como las pizarras son reducidas y opacas. Refiere que, básicamente, en la fase presencial es donde desarrolla casi todo el contenido de la derivada y la resolución de ejercicios; asigna a los estudiantes actividades fuera del horario de clases tales como foros, tareas y talleres virtuales.	En efecto, vemos que los contenidos medulares de las derivadas los desarrolla en clases. Se aprecia que asigna ciertas tareas para el trabajo fuera del horario de clase y en el campus virtual. Observamos que de la separata de ejercicios que le provee la coordinación de asignatura, selecciona las tareas de derivadas que encarga a los alumnos para que resuelvan fuera de horarios de clases.
	Tiempo (de la enseñanza colectiva, de tutoría, tiempo de aprendizaje)	En sus clases trata de ser selectivo en cuanto a los contenidos de derivadas y aplicaciones, por lo que desarrolla aquello que considera que es realmente importante para el alumno, así como las competencias para que tengan éxito en el curso. Considera que invierte tiempo razonable en ejercitar a los alumnos mediante talleres sobre derivadas, así como en temas complejos o que representan mayor dificultad para ellos como son: la regla de la cadena, la regla del producto y la regla del cociente de funciones.	En efecto, se evidencia que hace talleres de resolución de problemas, en los que plantea ejercicios de derivadas de menor a mayor grado de dificultad, dedicando un tiempo considerable a las resoluciones de tipo procedimental.
Emocional	Intereses y necesidades	En relación a las tareas de derivadas, el docente dice que, basado en su experiencia, presenta tareas que sean de interés para los estudiantes Para lograr que los alumnos valoren la utilidad de la derivada en la vida cotidiana, él incluye lo intuitivo en la parte introductoria del tema; además, trata de presentar problemas de carácter físico o ligados a la vida profesional de los estudiantes de ingeniería.	Se observa que las tareas que propone son básicamente ejercicios algebraicos de derivadas que están en la separata que le provee la coordinación de la asignatura. En efecto, evidenciamos que sí usa lo intuitivo para relacionar las derivadas con aspectos cotidianos o del entorno del alumno. No se aprecia que incluya problemas del contexto de la ingeniería.

ID	COMPONENTE	RESPUESTA DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Emocional	Actitudes	Considera que la más grande motivación para que los estudiantes se impliquen en las actividades matemáticas que les propone, es la nota (motivación extrínseca); además de ello observa la parte actitudinal y el desempeño del alumno en las clases. Afirma que transmite responsabilidad a los estudiantes predicando con el ejemplo, siempre desarrolla sus clases con puntualidad y cumple con abordar los temas programados en el sílabo. También señala que ha logrado que sus alumnos sean perseverantes Menciona que por la naturaleza de la asignatura le ha resultado complicado propiciar momentos para que los estudiantes argumenten y participen de manera equitativa en las clases; no puede atender a todos (le falta tiempo).	Observamos que en sus clases aplica una motivación extrínseca al asignar una nota a las tareas y actividades matemáticas. También se aprecia que asigna puntaje a la evaluación permanente y desempeño de los alumnos Efectivamente, vemos que se preocupa por cumplir con la programación del sílabo, es puntual, amable y cortés con los estudiantes, por lo que inferimos que fomenta la responsabilidad y perseverancia en ellos En las clases procura atender las dudas de algunos estudiantes, saca a la pizarra a otros, pero luego corta la participación y continúa con la clase. En efecto, no argumentan de forma equitativa por falta de tiempo.
	Emociones	Cuando los estudiantes participan y se equivocan, nunca condena el error, más bien los felicita por participar e incentiva para que pierdan el temor y el rechazo hacia las matemáticas. Procura consolidar la autoestima de sus alumnos.	El docente es atento, amable y muy accesible a todos los estudiantes, les insiste para que participen desde su lugar o en la pizarra, se ve siempre les da ánimo para que se atrevan a resolver los ejercicios que les plantea.
Ecológica	Adaptación al currículo	Cree que los contenidos de derivadas que enseña sí dan un soporte fuerte a las asignaturas posteriores de las carreras de ingeniería; es decir, sí se corresponden con las directrices curriculares. No hay correspondencia en la implementación, ya que no se da como se ha pretendido por falta de tiempo, por la estructura del curso o porque hay muchos contenidos.	Observamos que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que enseña, así como su evaluación, son coherentes con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería. Aunque también vemos que el sílabo contiene una densidad importante de contenidos por lo que inferimos que le falta tiempo.

ID	COMPONENTE	RESPUESTA DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Ecología	Conexiones intra e inter-disciplinares	Opina que hay una fuerte conexión entre los temas de derivadas que desarrolla y los contenidos posteriores contemplados en el currículo de ingeniería, ya que conlleva al estudio de Cálculo Integral, Cálculo en Varias Variables, y luego al Cálculo para la Toma de Decisiones.	Se observa que en sus clases el docente formula comentarios sobre el uso futuro de las derivadas a lo largo de la carrera profesional, vinculándolas con asignaturas futuras tanto de la matemática como de la ingeniería.
	Utilidad sociolaboral	Considera que los contenidos de derivadas que imparte son útiles para la profesión de ingeniero, ya que les dotan de herramientas para adquirir las competencias de su especialidad.	Podemos evidenciar que sostiene ante los estudiantes de ingeniería, que las derivadas les servirá como base sólida para que afronten con éxito los cursos de su especialidad.
	Innovación didáctica	Afirma que en sus clases innova con recursos tecnológicos ya que le está permitido; respecto a nuevos contenidos de derivadas y formas de evaluación, dice que no puede hacer innovaciones, debido a que la universidad asigna una estructura definida la cual todos los profesores tienen que respetar, acogerse y cumplirla.	Vemos que usa recursos tecnológicos como, por ejemplo, abre una hoja de cálculo o proyecta en la pizarra el Geogebra para mostrar una gráfica de la derivada. Sobre la evaluación y agregar nuevos contenidos, se ve que está definido por la universidad en el sílabo y se debe cumplir.

6. Conclusiones

Los resultados obtenidos nos permiten dar una respuesta a la pregunta que nos habíamos propuesto contestar en este estudio para el docente B: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica del profesor en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería? Además, podemos determinar el peso que tienen estos criterios en su práctica, como resultado de la triangulación realizada entre lo que dice y lo que se ha observado que hace en las aulas. En la columna de la izquierda del esquema de la Figura 1 se muestran, en la parte superior, los CID que aparecen en las respuestas del profesor B cuando se le formula la pregunta general de cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica (epistémico, interaccional, emocional, mediacional y ecológico); mientras que en la parte inferior (cognitivo) se halla el criterio de idoneidad (CI) que no menciona en su respuesta (primera parte de la entrevista).

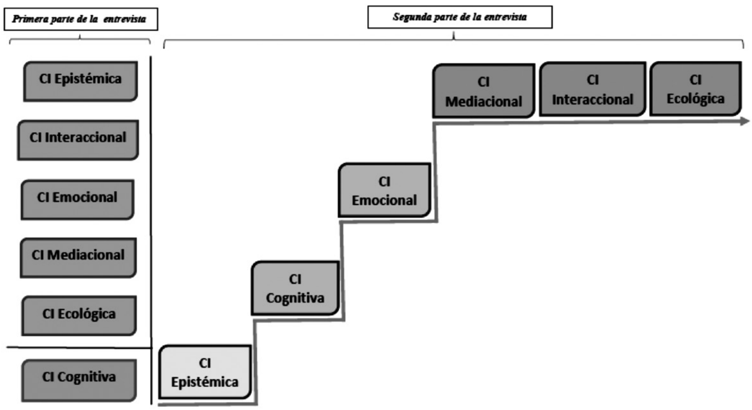


Figura 1. Esquema de criterios que guían la práctica del Docente "B"

En la columna derecha del esquema se ubican los criterios que emergen en sus respuestas a las preguntas específicas relacionadas con alguno de los componentes de los CID (segunda parte de la entrevista). Tal como era esperable, en esta columna aparecen los seis CID; ahora bien, no todos tienen la misma importancia para el profesor B al momento de reflexionar y justificar su práctica. Para representar el diferente peso que tiene cada criterio como guía de la práctica del profesor se ha usado el esquema de la escalera, siendo los escalones superiores los de mayor peso, en tanto que los criterios que están en la parte inferior tienen menor peso. La disposición en la escalera, además de indicar el menor o mayor peso, también pretende representar cómo algunos CID quedan supeditados por otros. El orden en el que aparecen los CID en la escalera es el resultado de la triangulación entre el discurso del docente y lo que se infiere de la observación de sus clases.

En su discurso inicial el docente B explica que los criterios epistémico, interaccional, emocional, mediacional y ecológico son los que orientan su práctica. Ahora bien, cuando en la segunda parte de la entrevista se le hacen preguntas más específicas sobre el criterio epistémico concluimos que: 1) comete algunos errores por apresuramiento, pero vemos que no son errores matemáticos sino de otra índole, 2) si bien, considera que las demostraciones sobre la derivada son importantes, sin embargo no hace demostraciones en sus clases por falta de tiempo y por no estar incluidas en el sílabo, 3) enfatiza en la mecanización, en la resolución de ejercicios por manipulación de reglas y fórmulas de derivación, dejando poco espacio para la resolución de problemas extramatemáticos, ya que le falta el tiempo, 4) no trabaja procesos relevantes de la actividad matemática tales como argumentación y modelización, lo cual justifica por la falta de tiempo. En consecuencia, para el docente B los aspectos epistémicos tienen un cierto papel a la hora de orientar su práctica, aunque estos aspectos se supeditan al criterio mediacional (falta de tiempo) y al ecológico (sílabo).

De otra parte, el criterio cognitivo que no había sido considerado al principio por este docente, cuando responde a las preguntas específicas sobre este criterio, observamos que empieza a ganar peso puesto que considera que: **1)** procura recuperar los conocimientos previos de los estudiantes cada vez que va a iniciar un nuevo tema matemático; **2)** se esfuerza por presentar unos contenidos de la derivada y sus aplicaciones que estén en la zona de desarrollo próximo y sean accesibles para los alumnos; **3)** hace algún esfuerzo por atender la diversidad y ritmos de aprendizaje de los alumnos; **4)** se asegura que los estudiantes estén aprendiendo el tema cuando les pregunta y repregunta, observa que respondan de manera coherente y discutan sobre el tema, aunque tiene que interrumpir para continuar con la clase, lo cual justifica por la falta de tiempo y porque tiene que cumplir con el sílabo; 5) no propone situaciones-problema de derivadas que exijan alta demanda cognitiva, sino que presenta tareas que priorizan la manipulación algebraica y son de solución inmediata, las mismas que no activan procesos cognitivos relevantes. En consecuencia, a partir de la triangulación con lo observado en sus clases podemos inferir que el docente B supedita los aspectos cognitivos al criterio mediacional (falta de tiempo), al interaccional (interacción con los estudiantes) y al ecológico (cumplir con todos los contenidos del sílabo).

Con relación al criterio emocional, al cual el profesor en su respuesta inicial da cierta importancia, en sus respuestas a la segunda parte de la entrevista (cuando se le hacen preguntas específicas sobre éste) se infiere que, efectivamente, lo tiene en cuenta, hecho que también se aprecia en la observación de sus clases. Por ejemplo, observamos que este profesor tiene en cuenta aspectos actitudinales de los estudiantes frente a la asignatura, así como el desempeño de los alumnos en las clases de derivadas; procura presentar situaciones de derivadas y sus aplicaciones que sean amigables, entretenidas y de interés para los estudiantes, aunque vemos que básicamente son ejercicios de tipo procedimental; el docente se esfuerza por transmitir responsabilidad a los estudiantes a partir de predicar con el ejemplo, así como también por lograr que sean perseverantes en la resolución de los ejercicios; los incentiva y anima a intentar resolver las tareas, les refuerza su autoestima para que pierdan el temor y el rechazo hacia las matemáticas; sin embargo acepta que no ha logrado la participación y argumentación de los estudiantes de manera equitativa por falta de tiempo. Por tanto, vemos que todo ello lo hace dentro de un modelo de clase magistral y expositiva, se infiere que el docente B supedita los aspectos afectivos al criterio mediacional (falta de tiempo para la participación) y al ecológico (desarrollar todos los temas del sílabo).

El criterio mediacional no sólo es tenido en cuenta en la respuesta inicial del profesor B, sino que emerge de la observación de sus clases y de las respuestas que da en la entrevista cuando se le pregunta específicamente sobre aspectos de medios, se infiere que este criterio tiene gran importancia para orientar la implementación de sus clases, y por ello lo hemos ubicado en la parte superior del esquema de pesos. Así por ejemplo, se preocupa por usar recursos tecnológicos como software matemático (Geogebra online y Cabri) en sus clases de derivadas, aunque, no trabaja la modelización y las demostraciones por falta de tiempo y porque no están programadas en el sílabo; las condiciones del aula y los elementos en ella, en general, sí son adecuadas para ejecutar una buena enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones, sin embargo, la cantidad de alumnos presentes en el aula le complica hacer una interacción adecuada con ellos; implementa los contenidos en la fase presencial, pero también utiliza el campus virtual para actividades complementarias e interactuar con los estudiantes; también, selecciona los contenidos más importantes de derivadas y les dedica tiempo en su desarrollo, así como invierte tiempo en los contenidos que representan mayor dificultad para los estudiantes.

En relación al criterio interaccional, observamos que no solamente es tenido cuenta en la respuesta inicial del profesor B, sino que también surge de la observación de sus clases y de las respuestas que brinda dicho docente cuando se le pregunta específicamente sobre aspectos interaccionales, se infiere que le asigna gran importancia en la implementación de sus clases. Así por ejemplo, se observa que interactúa con los estudiantes en el desarrollo de sus clases mediante preguntas, los atiende, los saca a la pizarra, identifica las dudas y dificultades de aprendizaje de las derivadas y, se esfuerza por esclarecerlas; hace uso de diferentes recursos argumentativos como metáforas, preguntas y clase magistral para implicar a los estudiantes en sus clases; considera el trabajo en equipos y hace participar tanto a los estudiantes que más saben, así como a los que menos conocen; procura generar el diálogo y la comunicación entre los estudiantes; a través de la interacción puede darse cuenta del aprendizaje de los alumnos, siempre está pendiente del proceso de aprendizaje. Ahora bien, también se observa que la interacción tiene ciertas limitaciones debido al número de alumnos en el aula y por la necesidad de cumplir el sílabo en el tiempo planificado, sin embargo, el criterio interaccional sigue teniendo un peso relevante en las clases de este docente.

El criterio ecológico aparece en su respuesta inicial y, de la triangulación realizada, vemos que tiene un papel fundamental para orientar la práctica del docente B, la cual justifica, sobre todo, por el cumplimiento de los contenidos del sílabo, aunque también hace reflexiones en clases en las que justifica por el hecho de tener en cuenta la futura profesión de los estudiantes; hace innovaciones en su práctica docente, sobre todo, en la parte de los recursos tecnológicos para enseñar derivadas y otros temas; también, en su discurso hace hincapié en el hecho de que las derivadas les servirán para cuando tengan que estudiar Cálculo Integral, Cálculo en Varias Variables, y Cálculo para la Toma de Decisiones. Por todo lo sustentado, concluimos que en la práctica docente de este profesor B, los criterios de idoneidad didáctica interaccional, mediacional y ecológico supeditan a los demás criterios (epistémico, cognitivo y emocional), al momento de diseñar e implementar sesiones de clases de la derivada y sus aplicaciones.

Reconocimiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Barcelona: La Muralla.

Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema, 32*(60), 255-278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema 35*(69), 263-288. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13

Font, V. (2019). Dilemas sobre las matemáticas entendidas como una materia general (ciencia básica) para diferentes carreras (profesiones). En Arango, A. J., Sánchez, O., Vargas, H., Ariza, M. X., Díaz, S. y Canoles, J. C. (Eds.), *Memorias III Congreso ciencias básicas en un mundo globalizado. Investigación experimental y simulación matemática*. Tunja, Colombia: Ediciones Usta-Universidad Santo Tomás.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Morales-López, Y., y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa, 45*, e189468. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

Pino-Fan, L., Font, V., y Breda, A. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. En Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L. y Choy, B.H. (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Singapore: PME.

Pochulu, M., y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 361-394

CAPÍTULO 14

ESTADO DE LA CUESTIÓN CON RELACIÓN AL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA CON EL USO DE LAS TIC

THE STATE OF RESEARCH INTO DIDACTIC-MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND MODELING WITH THE USE OF ICT

Víctor Hoyos Prioló, Lucía Bustamante Meza,
Eric Hernández Sastoque
victorhoyosjp@unimagdalena.edu.co,
lbustamante@unimagdalena.edu.co,
ehernandezs@unimagdalena.edu.co
Universidad del Magdalena Colombia

Resumen

El presente trabajo aborda el Conocimiento Didáctico-Matemático en correspondencia con el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), utilizado en función del análisis de objetos, procesos y fenómenos propios de la educación matemática Godino y Batanero (1994). Se particulariza en la modelación matemática desde sus diferentes perspectivas, describiendo el rol que cumplen las TIC en la enseñanza con modelación. A partir de la faceta mediacional presente en el EOS el uso de las TIC se relaciona con el modelo de Misrha y Koehler (2006), denominado Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido (TPACK). Este análisis teórico posibilita la integración de conocimientos necesarios para la enseñanza matemática en la actualidad. Se concluye que el EOS

es un sistema dinámico e integrador que aporta fundamentos para la formación inicial o en servicio de profesores de matemáticas.
Palabras clave: *conocimiento didáctico-matemático, modelación matemática, TIC, TPACK.*

Abstract

This research, addresses Didactic-Mathematical Knowledge. In correspondence with, the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (EOS), used in function of the analysis of objects, processes and phenomena typical of mathematics education (Godino and Batanero, 1994). In particular, studies have focused on mathematical modeling from its different perspectives, describing the role played by ICT in teaching with modeling. Drawing on the mediational facet present in the EOS, the use of ICT relates to Mishra and Koehler's 2006 proposal: Technological and Pedagogical Knowledge of Content (TPACK). This theoretical analysis enables an integration of knowledge that is vitally important for mathematics teaching today. In conclusion: EOS is a dynamic and integrative system which provides a theoretical basis for the initial or in-service training of mathematics teachers.
Keywords: *didactic-mathematical knowledge, mathematical modeling, ICT, TPACK.*

1. Antecedentes

La educación matemática busca avanzar en el desarrollo de una fundamentación pedagógica y didáctica que integre marcos teóricos y metodológicos inherentes a los problemas presentes en las tareas de enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de la matemática. En un sentido amplio, Shulman (1986) y otros autores proponen un marco conceptual del conocimiento del profesor que denominaron conocimiento pedagógico del contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK), concepto ampliamente estudiado desde distintas miradas para hacer referencia al conocimiento de la disciplina y de la enseñanza (Ball, Hoover y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008).

Por su parte, el sistema teórico-metodológico dado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), propuesto por Godino, Batanero y Font (2007), configura un sistema de categorías esenciales en el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor de matemáticas. Este enfoque, cuenta con cierto consenso en la comunidad científica, del cual se derivan investigaciones sobre el estudio de los conocimientos y competencias que posee el profesor de matemáticas con relación a los objetos y significados matemáticos (Godino et al., 2007).

En esta sistematización teórica se propone describir también algunos argumentos que, mediante la investigación en educación matemática, hacen referencia al proceso de modelación matemática a partir de distintas perspectivas investigativas, como la realista, la contextual, la educativa, la crítica, la epistemológica y la cognitiva (Kaiser y Sriraman, 2006).

Por otra parte, en la actualidad, los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación en contextos escolares de la matemática requieren incorporar las tecnologías de la información y la comunicación TIC. Por ello, se analiza la convergencia del CDM, la modelación matemática y el uso de las TIC, considerándose oportuno promover la utilización de programas informáticos y recursos multimedia soportados en las TIC. Pero, para integrar las TIC al proceso de enseñanza con modelación matemática, es pertinente revisar los aportes de Mishra y Koehler (2006) en su propuesta Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido (TPACK).

1.1. Contexto de la problemática

Este trabajo se enmarca en una investigación que busca abordar un problema didáctico, asociado con el área epistémica de la educación matemática, particularizado en la formación continua o en servicio de profesores en Colombia y relacionado con el conocimiento didáctico-matemático en modelación matemática integrando las TIC. En este documento se busca posicionar la investigación en un contexto teórico que posibilite el avance hacia un estudio fundamentado de la realidad, para posteriormente, diseñar un programa de formación de profesores en servicio y evaluar sus efectos.

Inicialmente, se puede expresar que, en algunas instituciones educativas colombianas, debido a sus estructuras organizacionales, currículos, planes de estudio y ambientes escolares poco flexibles, se dificulta la implementación de otras formas de enseñar matemáticas diferentes a la tradicional clase magistral. Motivo por el cual se requieren transformaciones que respondan a las necesidades del contexto social de las comunidades educativas locales y a las demandas globales actuales. En efecto, la modelación matemática posibilita la apertura de muchas ventanas de acceso al conocimiento matemático (Kaiser y Schwarz, 2010).

En Colombia y otros países de la región la enseñanza matemática mayoritariamente se imparte en forma tradicional, siguiendo rigurosamente lineamientos planteados por un currículo escolar no contextualizado. Condiciones como la falta de programas de formación continua de docentes, disponibilidad de tiempo de profesores en sus jornadas laborales y falta de iniciativas gubernamentales son factores que limitan la aplicación en el aula de situaciones reales de modelación matemática en la Educación Básica Secundaria y Media. Al respecto, Villa-Ochoa (2015) señala que, "la implementación de la modelación matemática en el cotidiano de las aulas de clase es escasa, debido a que se presentan barreras de diversa naturaleza; entre ellas, las altas demandas matemáticas, pedagógicas y personales que la modelación impone al profesorado" (p. 135).

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) declara que "toda la dificultad que tienen los alumnos en la resolución de problemas en geometría, en cálculo, en física, es debido a la falta de cultivar el proceso de modelar mentalmente situaciones de la vida real" (p.80). De esta manera se manifiesta una preocupación por el bajo nivel de desarrollo del proceso de modelación y su incidencia en la proposición y resolución de problemas. Por ello, el adelanto de investigaciones donde se promueva la formación de profesores en este tema responde pertinentemente a las necesidades educativas en el país.

En otra vía, se puede decir que las herramientas soportadas en las TIC para la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación, en el momento actual de crisis mundial generada por la pandemia Covid-19, adquieren una relevancia importante para el ámbito educativo. Las evidentes consecuencias de las medidas de aislamiento social, donde instituciones educativas y universidades han quedado vacías, han originado la necesidad de recurrir a la tecnología para darle continuidad a las actividades educativas. Hecho que, ha generado preocupación en el profesorado, quienes según Ortega (2020) "día a día observan cómo la cotidianidad del aula se ve avocada en el dinámico y desafiante mundo tecnológico" (p. 252).

Por tanto, en el contexto general de esta investigación se busca responder la pregunta ¿cuáles serán los efectos de un programa de formación del conocimiento didáctico-matemático en modelación matemática con el uso de las TIC, en la enseñanza de los profesores de educación básica secundaria y media de la Institución Educativa Cristóbal Colón de Montería (Colombia)?

1.2. Análisis, discusión y propuesta

1.2.1. Configuración de un sistema teórico Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)

Algunas perspectivas de investigación en educación matemática han procurado darle forma a un sistema teórico-metodológico que articule distintos conceptos, propuestos desde distintas corrientes. Con la propuesta de Shulman (1986), conocimiento pedagógico del contenido interpretado como formas efectivas de representar y exponer un tema que lo hacen más asequible para otros. Así, se estableció un referente para debatir sobre el conocimiento del profesor, necesario para la enseñanza de la asignatura, que se ha extendido a las diferentes áreas de enseñanza (Ball *et al.*, 2008). En este sentido, en la incesante búsqueda de una enseñanza efectiva en el caso específico de la matemática se han integrado otras categorías que han configurado un sistema teórico dinámico y emergente que intenta brindar herramientas teórico-metodológicas viables para analizar los conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas.

Es así como se propone e integra el conocimiento especializado del contenido a la noción Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), haciendo referencia al "conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas" (Ball *et al.*, 2008, p.395). Es oportuno aclarar que esta descripción se fundamenta en la enseñanza, más no en el profesor o los estudiantes, es decir, hace referencia a las actividades propias de la enseñanza y las demandas matemáticas de dichas actividades. Entre ellas, se puede enunciar: el mostrar a los estudiantes una forma de resolver problemas, identificar errores, atender sus dudas y evaluar el proceso de avance en sus niveles cognitivos. Esta noción evidencia ciertas limitaciones al relegar las trayectorias docente y dicente.

A partir de una mirada fundamentada en teorías de la escuela antropológica de la educación matemática, con bases semióticas y configuraciones afines a la propuesta del MKT, en los trabajos de Godino y Batanero (1994), Godino (2002), Godino *et al.* (2007) se procura confeccionar una configuración teórica integradora conocida como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática, donde se expone una serie de categorías implicadas en el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM). Así mismo, este enfoque se ha aceptado con cierto consenso como un referente para la investigación en educación matemática. Esto debido a que aporta una serie de herramientas eficaces para el estudio en detalle de significados en los objetos matemáticos que intervienen en la enseñanza y el aprendizaje, entre otros procesos y fenómenos presentes en las interacciones que surgen entre los actores del proceso didáctico, el profesor, los estudiantes y el saber matemático.

En los diferentes trabajos de investigación aportados por el EOS se plantea la noción Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM) para:

> Referirse a dicho complejo de conocimientos y competencias profesionales. Incluye, por tanto, en el conocimiento didáctico, el conocimiento del contenido matemático en cuanto dicho contenido se contempla desde la perspectiva de su enseñanza. El control de las transformaciones que se deben aplicar al contenido matemático para su difusión y comunicación en los distintos niveles escolares debe ser también una competencia del profesor de matemáticas (Godino, 2009, p.15).

Godino y sus coautores han estructurado un compendio de fundamentos teórico-metodológicos propicios para la investigación en el campo de la educación matemática que se materializa en "a) Un modelo epistemológico sobre las matemáticas basado en presupuestos antropológicos/ socioculturales; b) Un modelo de cognición matemática sobre bases semióticas; c) Un modelo instruccional sobre bases socio- constructivistas; d) Un modelo sistémico – ecológico que relaciona las anteriores dimensiones" (Godino, 2009, p.20). Alrededor de este sistema se configuran tres grandes dimensiones para el CDM: Matemática, didáctica y Meta didáctico-matemática (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015), donde se organizan un compilado de categorías y subcategorías que intentan explicar a partir de una visión holística y detallada, los procesos y fenómenos presentes en la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de la matemática. A continuación se describen brevemente estas tres dimensiones.

En primera instancia, la dimensión matemática se desagrega en dos subcategorías; el conocimiento común y ampliado del contenido. Claramente estas subcategorías se derivan del mapa de conocimientos del MKT propuesto en Hill *et al.* (2008), Ball *et al.* (2008). El conocimiento común del contenido se define como el que posee el profesor sobre un objeto matemático concreto, suficiente para solucionar problemas matemáticos del currículo o de libros de texto. Mientras que el conocimiento ampliado del contenido es retomado del dominio del conocimiento del horizonte matemático (Ball & Bass, 2009). Este se puede explicar cómo el conocimiento que tiene el profesor para establecer relaciones entre un concepto o saber matemático que se esté estudiando en un determinado momento, en un nivel educativo específico, con conceptos o saberes matemáticos que se estudiarán en niveles educativos superiores (Pino y Godino, 2015).

En el marco de la política pública colombiana la regulación de la educación matemática en el país está materializada en los Estándares Básicos de Competencia. Se puede considerar que el conocimiento ampliado del contenido se relaciona con la noción "coherencia vertical" dado en los Estándares Básicos de Competencia, la cual, "está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados" (MEN, 2006, p. 78). Este conocimiento le permite al profesor plantear actividades de profundización fomentando de esta manera en el alumno el interés por explorar o por esperar descubrir esas nuevas nociones que aún desconoce.

La dimensión didáctica esclarece que sólo el conocimiento matemático es insuficiente para la práctica de la enseñanza (Pino-Fan *et al*., 2015). En este sentido, a partir del EOS para la dimensión didáctica se constituyen seis subcategorías o facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica (Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2015), que de manera microscópica facilitan el estudio de los procesos enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática.

En la dimensión meta didáctico-matemática, de la cual subyace la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2011), se establece una serie de criterios e indicadores para analizar las facetas presentes en la dimensión didáctica, herramienta que puede ser utilizada para el análisis y valoración de programas o planes de formación docente inicial o en servicio.

Finalmente se resalta en esta sección que las tres dimensiones presentadas sobre el CDM a partir del EOS proponen herramientas poderosas para el análisis de objetos, procesos y fenómenos que se manifiestan en el proceso didáctico de la matemática y que seguramente pueden ser de gran utilidad para el estudio de uno de los procesos matemáticos de relevancia para la educación básica, como es la modelación. Por tanto, atendiendo al interés de este estudio y reconociendo que el MEN (1998) plantea la modelación matemática, como proceso fundamental para la comprensión de la utilidad de la matemática en la realidad y en otras disciplinas a continuación se presenta una revisión simplificada referente a las distintas perspectivas epistemológicas de la modelación matemática.

1.2.2. Modelación matemática perspectivas epistemológicas

Una sistematización de diversos trabajos sobre el estudio de la modelación matemática en el aula de clases fue realizada por Kaiser y Sriramam (2006), donde se clasifican según distintas investigaciones y momentos históricos, algunas temáticas o perspectivas sobre la modelación matemática, tales como; la modelación realista, modelación contextual, educacional, modelación crítica, epistemológica o teoría de la modelación y, dentro del campo de la psicología, la modelación cognitiva. Luego, en esa misma búsqueda de establecer distintas miradas, perspectivas o líneas investigativas de la modelación matemática.

En la enseñanza de la modelación matemática desde la perspectiva realista se asume que los modelos matemáticos tienen múltiples aplicaciones y son ampliamente utilizados en muchas disciplinas científicas y tecnológicas con aplicaciones en diferentes contextos sociales (Blomhøj, 2009). También, se tipifica esta perspectiva de la modelación matemática como una resolución de problemas aplicados, prestando especial atención en situaciones de la vida real para crear modelos y en las relaciones con otras disciplinas.

Por otra parte, la perspectiva contextual de la modelación matemática se apoya en el planteamiento y la resolución de problemas redactados previamente, donde la principal intención es establecer metas en la resolución de dichos problemas, que permitan identificar conexiones psicológicas con las teorías generales de aprendizaje. Esta perspectiva, se enfoca en la configuración y prueba de actividades didácticas de modelación. Lesh y Doerr (2003), señalan que estas actividades deben cumplir seis principios: i) el principio de realidad, ii) el principio de construcción del modelo, iii) el principio de autoevaluación, iv) el principio de documentación del constructo, v) el principio de generalización del constructo, y vi) el principio de simplicidad.

La perspectiva educativa expuesta por Blomhøj (2009), presenta como idea principal integrar la modelación como un medio para aprender las matemáticas y como una competencia importante y con un enfoque de derecho. Esta visión da importancia a los objetivos, a las justificaciones para enseñar matemática con modelación matemática y enseñar la modelación en todos los niveles educativos, a las formas de organizar las actividades en los planes de estudio, a los problemas relacionados con su implementación en la cotidianidad escolar, a las tareas de enseñanza, y a los problemas en la evaluación de las acciones en los alumnos.

En la perspectiva epistemológica, según Kaiser y Sriraman (2006), se busca construir teoría matemática a partir de la modelación, desde un enfoque científico-humanista que da relevancia a la construcción del conocimiento, donde se ponen los objetivos epistemológicos en primer plano y se enfatiza el desarrollo de la teoría matemática como parte integral de los procesos de modelación matemática.

Seguidamente, en la perspectiva cognitiva hay una implicación psicológica; Kaiser y Sriraman (2006) concluyen que este enfoque centra las intenciones de investigación en el análisis, la interpretación y comprensión de los procesos de pensamiento que emergen de los estudiantes durante la solución de tareas de modelación matemática; es decir, mediante la observación se pretende comprender y describir las dificultades y actitudes hacia el aprendizaje que experimentan los estudiantes en cada una de las facetas del ciclo de modelación matemática (Borromeo, 2010).

En correspondencia, Borromeo (2018) propone un modelo de competencias para la formación de docentes en la enseñanza de la modelación matemática. En este modelo, se presentan las dimensiones: teórica, tareas, instruccional y diagnóstica. En la figura 1 se muestra este modelo.

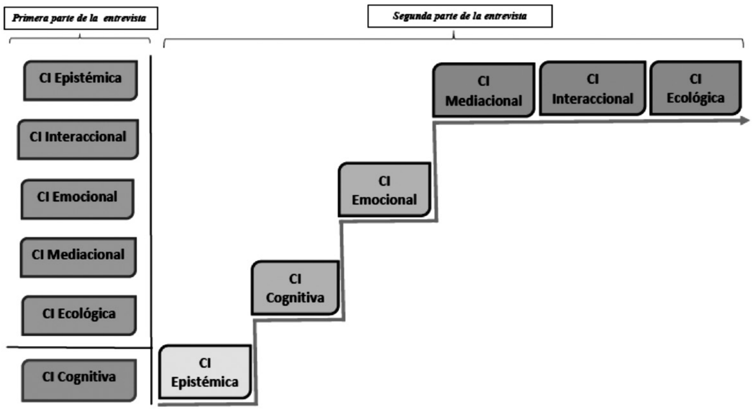


Figura 1. Modelo de competencias necesarias en la enseñanza de la modelación matemática

Fuente: Traducción propia de Borromeo (2018, p. 5)

Desde la mirada de la perspectiva crítica, la modelación matemática se define como, "un ambiente de aprendizaje donde los sujetos son invitados a problematizar e investigar, por medio de las matemáticas situaciones con referencia en la realidad" (Barbosa, 2004, p. 75). No obstante, resulta importante aclarar que esa visión de la realidad, no se resume al análisis a partir del conocimiento netamente matemático, sino que, desde una perspectiva crítica se promueve mediante tareas el desarrollo del pensamiento crítico, alejándose de ese contexto abstracto o totalmente matemático, transitando en tal sentido, hacia un contexto social y político, que busca el desarrollo de la ciudadanía en forma crítica (Kaiser y Sriramam, 2006).

Se destacan en esta perspectiva, el aporte realizado por Araújo y Barbosa (2005) donde se hace énfasis en un posicionamiento de la matemática en la sociedad, y en este sentido apoyar el desarrollo del pensamiento crítico, a partir de la modelación matemática, asumiendo ésta, un rol liberador en la vida del individuo. Aunque se considera importante la perspectiva cognitiva, necesaria para el análisis de la enseñanza y el aprendizaje en contextos escolares. En tanto que; desde esta mirada fundada en la psicología el profesor puede percibir el progreso de los alumnos durante su aprendizaje, tema importante en la formación de profesores (Borromeo, 2014, 2018).

1.2.3. Rol de las TIC en la modelación matemática una interacción con el TPACK

Debido al acelerado desarrollo y diversificación de la tecnología en muchos campos de la actividad humana, las TIC se han convertido en un tema relevante para ser estudiado a partir del campo educativo. Por supuesto que el contexto de la educación matemática no es ajeno a esta realidad; además, se cuenta con un robusto y dinámico cuerpo teórico y metodológico, resultado de la investigación relacionada a la aplicación de las TIC en diversos procesos de la educación matemática, en distintos niveles de educación. Entre esos procesos, se encuentra la modelación matemática, la cual ha sido investigada ampliamente en los últimos años (Greefrath, 2011).

En lo que concierne a la política nacional colombiana, el MEN (1998) reconoce que con la aparición de la era digital un tema importante es la búsqueda y configuración de modelos matemáticos.

La relación entre tecnología y matemáticas tiene una dinámica de construcción simultánea, pues gracias a los modelos matemáticos se ha desarrollado la tecnología y esta a su vez apoya los procesos de desarrollo del conocimiento matemático (Camero, Martínez Casanova y Pérez, 2016).

Uno de los puntos de inflexión que ha limitado la incorporación TIC en la modelación es la formación de docentes. Zaldivar, Quiroz y Medina (2017) aportan mediante la secuenciación de tareas de modelación el uso de herramientas TIC durante el ciclo de modelación matemática. En este sentido, Rodríguez y Quiroz (2015) identificaron unas fases claves durante el proceso de modelación matemática donde es preciso incorporar las TIC: al momento de proponer una situación real, al configurar el modelo matemático y cuando se validan los resultados matemáticos.

Por su parte, Parra, Rendón, Ocampo, Sánchez, Molina, y Villa (2018), determinaron formas de participación de los profesores mediante un programa de formación que constituyó una vía, para construir conocimiento matemático a partir de la modelación. En este programa se promovió la interacción para aportar al desarrollo profesional de los profesores. Sin duda alguna, "estas interacciones con las TIC en el aula de clases permiten el desarrollo de competencias y la creación de ambientes de aprendizajes diferentes a los tradicionales por lo que se genera una motivación a la comunidad de aprendizaje" (Hoyos-Prioló, 2017, p. 79).

En la investigación de la modelación en el contexto educativo, Molina, Rendón y Villa (2019) caracterizan dos roles que las herramientas TIC desempeñan en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El primero, implica su utilización como un recurso que se predispone para asistir alguna fase del proceso de modelación matemática, aquí las TIC se limitan a reducir la carga operativa para obtener resultados de cálculos numéricos o para realizar representaciones visuales y transformar datos (Rodríguez y Quiroz, 2016; Stillman y Brown, 2014).

Un segundo rol, define las herramientas TIC como un reorganizador del proceso de modelación en esta perspectiva. Como ejemplo, el proceso de modelado de Geiger (2011) mostró que las TIC propician interpretaciones y discusiones del fenómeno de estudio que posteriormente promueven la toma de decisiones y la validación del modelo matemático utilizando recurso digital (Borba, Villarreal, y Soares, 2016; Villa-Ochoa et al., 2018)

Al proponer alternativas para la innovación educativa mediante la incorporación de las TIC en el aula, estas deben soportarse con fundamentos pedagógicos y didácticos que guíen la enseñanza matemática en el aula. En tal sentido, es acertado apropiarse del dominio Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido (TPACK) (Mishra y Koehler, 2006; Koehler y Mishra, 2008) conformado por la concatenación entre pedagogía, tecnología y conocimiento del contenido.

El modelo TPACK en la enseñanza con modelación matemática se puede considerar como un referente para la investigación en educación con TIC y como fundamento para configurar programas de formación docente en tecnologías aplicadas a la educación matemática. En la figura 2 se propone una integración del modelo CDM ampliado propuesto por Pino-Fan y Godino (2015) con el modelo TPACK. Por supuesto, como un ejercicio teórico reflexivo para proponer el debate.

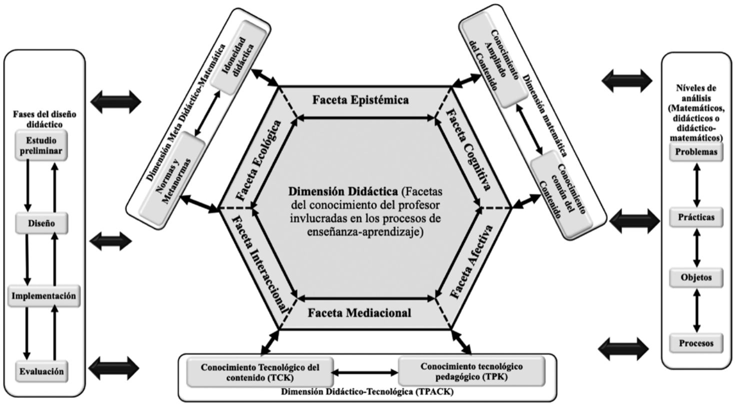


Figura 2. Sistema de Conocimientos Didáctico-matemático (CDM) y Tecnológico, Pedagógico del Contenido TPACK

Fuente: Adaptado de: Mishra y Koehler, 2006; Pino-Fan y Godino, 2015

Finalmente los modelos de conocimiento expuestos para el ejercicio de la enseñanza matemática configuran un complejo sistema teórico-metodológico articulado desde distintas miradas y confeccionados a lo largo de las últimas décadas, que si bien, resultan de distintos grupos de investigación, son muchas las interacciones y acuerdos entre ellos; pasando por el MKT conocimiento matemático necesario para la enseñanza, el CDM conocimiento didáctico matemático a partir del EOS, el modelo para la enseñanza de la modelación matemática y el TPACK conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido. Todo ello necesario para apoyar la práctica pedagógica del profesor en la enseñanza con modelación matemática.

2. Metodología

Este trabajo corresponde a una de las fases de una investigación doctoral, enmarcada en el tipo documental-bibliográfica con un diseño bibliográfico el cual se fundamenta en la pesquisa, recuperación, análisis, crítica e interpretación de información secundaria obtenida y sistematizada por otros investigadores, en fuentes documentales: impresas y digitales (Arias, 2012). Tomando como fundamentos los criterios expuestos por Montero y Hochman (2005), en el procedimiento aplicado: primero, se seleccionaron e indagaron las fuentes bibliográficas en formatos impreso y digital, la información congruente con la temática de estudio, segundo, a través del uso del fichaje se recogieron las palabras de los autores, presentando las ideas básicas contenidas en las fuentes consultadas, que permitieron el análisis y la síntesis de los contenidos, tras el empleo de técnicas de resumen analítico y análisis crítico; finalmente, se configuró la información en un todo coherente y lógico, derivando las conclusiones respectivas.

3. Conclusiones

Uno de los problemas recurrentes que se exhibe, mediante las investigaciones en educación matemática y específicamente en modelación matemática, es la formación inicial y en servicio de los docentes. Puesto que la enseñanza matemática en las aulas de clase aún se imparte de forma tradicional y poco contextualizada, esta condición puede estar relacionada con los bajos resultados de las pruebas aplicadas a los estudiantes, donde deben emplear el saber matemático en contextos extramatemáticos. Por tanto, urge una transformación urgente de métodos, estrategias y formas de organizar el conocimiento en el aula, para hacerlo atractivo a los dicentes.

El profesor de matemáticas requiere apoyar el ejercicio de la docencia en los avances teóricos-metodológicos vigentes y actuales que le permitan reflexionar sobre su propia práctica y mejorarla. Sin duda alguna el sistema teórico sobre conocimiento didáctico-matemático (CDM) desarrollado a partir del EOS ofrece una gama de completas herramientas para interpretar y comprender de manera detallada los hechos, representaciones, lenguajes, significados, objetos, sistemas de prácticas, trayectorias didácticas, interacciones y fenómenos que emergen en las tareas de enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de la matemática.

Es necesario reconocer la inclusión de la modelación matemática al aula como una tarea compleja que demanda un alto nivel de formación del docente de matemáticas y además para los estudiantes resulta un ejercicio desafiante. Este hecho dificulta aún más el tratamiento didáctico de tareas de modelación matemática en las instituciones educativas.

Es importante recurrir a experiencias, modelos, teorías y estrategias que, a partir de la investigación, revelen vías para el uso de las TIC con un sentido pedagógico en la enseñanza matemática. El EOS, desde la faceta mediacional en la dimensión didáctica, establece una serie de criterios para que el profesor de matemáticas pueda analizar el uso de medios y recursos tecnológicos. Sin embargo, el modelo TPACK ofrece una completa integración de conocimientos para integrar las TIC a la enseñanza de un contenido específico. Con este modelo, es posible ampliar la faceta mediacional para observar con especial detalle las interacciones que se dan en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática con el uso de las TIC.

Referencias

Araújo, J. y Barbosa, J. (2005). Face a face com a modelagem matemática: como os alunos interpretam essa atividade? *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 18(23), 1-17.

Arias, F. (2012). *El proyecto de investigación*. 6ta Ed. Caracas, Venezuela: Editorial Episteme.

Ball, D. L. y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learnes' mathematical futures. Paper presented at the 43Rd Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held in Oldenburg, Germany.

Ball, D., Hoover, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Barbosa, J. C. (2004). Modelagem Matemática: O que é? ¿Por qué? Como? *Veritati*, 4, 73- 80.

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. En M. Blomhoej, & S. Carreira, *Mathematical applications and modelling in the teaching andlearning of mathematics* (págs. 1- 18). Monterrey: Roskilde universitet.

Borba, M. C., Villarreal, M. E. y Soares, D. S. (2016). Modeling using data available on the internet. En C. Hirsch & E. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 143–152). Reston: National Council of Teacher of Mathematics.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 31(1), 99-118.

Borromeo Ferri R. (2018) Key Competencies for Teaching Mathematical Modeling. In: Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9_1

Camero Reinante, Y., Martínez Casanova, L. y Pérez Payrol, V. B. (2016). El desarrollo de la Matemática y su relación con la tecnología y la sociedad. Caso típico. *Revista Universidad y Sociedad*, 8(1), 97-105.

Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*: ICTMA14 (pp. 305–314). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007- 0910-2_31

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En *XIII Conferencia Interamericana de Educacao Matemática* (pp. 1-20). Recife, Brasil: (CIAEM-IACME).

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), pp. 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 127-135.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (20), 13-31.

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling – Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling*, (ICTMA 14) (pp 301 – 304). New York: Springer.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

Hoyos-Prioló, V. J. (2017). Aprendizaje móvil en el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo. *Pedagogía Profesional*.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM,* 38. 302-310. Doi: 10.1007/BF02652813.

Kaiser, G. y Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51-76.

Koehler, M. J. y Mishra, P. (2008). Introducing TPCK. En AACTE Committee on Innovation and Technology. *The handbook of technological pedagogical content knowledge* (TPCK) for educators (pp. 3-29). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. y Doerr, H. (eds.) (2003). *Beyond Constructivism – Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_ matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencia en matemáticas*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teacher College Record*, 108(6), 1017-1054.

Molina-Toro, J. F., Rendón-Mesa, P. A. yVilla-Ochoa, J. A. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(8), em1736. https://doi.org/10.29333/ejmste/108438

Montero, M. y Hochman, E. (2005). *Investigación documental. Técnicas y procedimientos*. Panapo. Venezuela.

Ortega, J. M. (2020). El conocimiento tecnológico pedagógico de contenido (TPCK): un análisis a partir de la relación e integración entre el componente tecnológico y conocimiento pedagógico de contenido. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (47). Doi: 10.17227/ted.num47-11339.

Parra-Zapata, M. M., Rendón-Mesa, P. A., Ocampo-Arenas, M. C., Sánchez-Cardona, J., Molina-Toro, J. F. y Villa-Ochoa, J. A. (2018). Participación de profesores en un ambiente de formación online. Un estudio en modelación matemática. *Educación matemática*, 30(1), 185-212. Doi: 10.24844/EM3001.07.

Pino-Fan, L. R. y Godino, J. D. (2015). Perpectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Caracterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 1429-1456.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. BOLEMA: *Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 60-89. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2015). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 19(1), 99-124. http://doi.org/10.12802/relime.13.1914

Rodríguez Gallegos, R. y Quiroz Rivera, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 91–110. https://doi.org/10.24844/EM2803.04

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Stillman, G. y Brown, J. P. (2014). Evidence of implemented anticipation in mathematising by beginning modellers. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 763–789. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0119-6

Villa- Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. Magis. *Revista Internacional de Investigación en Educación*, 8(16), 133-148. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe

Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D. y Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación universitaria*, 11(2), 25-34.

Zaldivar, J., Quiroz, S. y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *Revista de investigación educativa*, 8(15), 87-110.

CAPÍTULO 15

LA COMPLEJIDAD DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES

THE COMPLEXITY OF MATHEMATICAL OBJECTS IN THE INITIAL TRAINING OF TEACHERS

Eulalia Calle[1], Adriana Breda[2], Vicenç Font[2]
eulalia.calle@cuenca.edu.ec, adriana.breda@ub.edu, vfont@ub.edu
[1]Universidad de Cuenca, [2]Universidad de Barcelona

Resumen

El objetivo es el desarrollo de la competencia en análisis de la idoneidad didáctica, correspondiente al componente muestra representativa de la complejidad del objeto matemático, en programas de formación de profesores de matemáticas de Ecuador. Por una parte, es una Investigación cualitativa que describe el uso competente de dicho componente y; por otra parte, tiene un componente de desarrollo al elaborar recursos didácticos para conseguirlo. Se diseñaron tareas y se analizaron las producciones de los participantes a partir de categorías a priori (los diferentes significados del objeto matemático implicado) mediante un análisis de contenido para inferir el significado parcial usado. El principal resultado es que los participantes asumen la importancia de considerar la plurisignificación de los objetos matemáticos en el proceso de ins-

trucción; sin embargo, tienen dificultades para diseñar tareas que impliquen el uso de una diversidad de significados.
Palabras Claves: *formación de profesores de matemáticas, reflexión sobre la práctica docente, idoneidad didáctica, complejidad de objetos matemáticos.*

Abstract

The objective is the development of competence in the analysis of didactic suitability, corresponding to the representative sample component of the complexity of the mathematical object, in training programs for mathematics teachers in Ecuador. It is a qualitative research that describes the competent use of said component and, on the other hand, it has a development component when developing didactic resources to achieve it. Tasks were designed and the productions of the participants were analyzed from a priori categories (the different meanings of the mathematical object involved) through a content analysis to infer the partial meaning used. The main result is that participants assume the importance of considering the multiple meaning of mathematical objects in the instructional process; nevertheless, they have difficulty designing tasks that involve the use of a variety of meanings.
Keywords: *training of mathematics teachers, reflection on teaching practice, didactic suitability, complexity of mathematical objects.*

1. Introducción

El Ministerio de Educación del Ecuador, con la intención de avanzar hacia la excelencia académica, viene implementado políticas educativas que buscan conseguir una educación primaria universal, erradicar el hambre y la pobreza, corregir las desigualdades de género (Cortez, 2014), cuya consecución depende en buena medida de la educación de la sociedad en general. Con esta finalidad, a partir del 2010, se ha reformado la educación general básica (EGB) y el bachillerato general unificado (BGU) introduciendo el modelo de formación de destrezas con criterios de desempeño. Esta reforma no ha obtenido los resultados positivos esperados (según lo conocido hasta ahora), por lo que es necesario continuar profundizando en la mejora de la formación inicial, así como de la formación continua de los profesores que imparten las matemáticas en el Ecuador, en particular fomentando el desarrollo de la reflexión sobre la práctica docente.

Con relación a la reflexión sobre la práctica docente, y luego de un recorrido bibliográfico de investigaciones realizadas acerca de la formación del profesor de matemáticas en el Ecuador, se puede afirmar que muy pocas, a diferencia de lo que ha pasado en otros países, se refieren al desarrollo de la reflexión, ya que las investigaciones existentes se han centrado en la metodología de enseñanza y en desarrollo de material concreto y aplicaciones de software, como propuestas para mejorar la educación matemática (Bernal, et al, 2019).

Por otra parte, la investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo; en el caso de Ecuador, la revisión de la literatura muestra que son necesarias investigaciones sobre esta temática.

El proyecto de tesis que se presenta se sitúa en esta línea de investigar sobre la reflexión del profesor sobre su práctica en un aspecto muy concreto: la reflexión del profesor ecuatoriano sobre la importancia de tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos (entendida como pluralidad de significados) en los procesos de instrucción.

2. Objetivo de investigación

El *objetivo general* de la investigación es desarrollar el diseño y la implementación de recursos formativos que promuevan la realización de análisis valorativos de procesos de instrucción por parte de los profesores (en formación o en servicio) utilizando la herramienta criterios de idoneidad didáctica e investigar cómo se desarrolla la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en estos dispositivos. En particular, se hace énfasis en la enseñanza y aprendizaje del uso del componente *representatividad de la complejidad del objeto matemático* del criterio de idoneidad epistémica. Este objetivo general se concreta en seis objetivos específicos:

3. Marco Teórico

La revisión de la literatura señala la importancia de la reflexión del profesor y la necesidad de potenciarla (Korthagen, 2010). En esta línea, una agenda emergente de investigación en el campo de la educación matemática está relacionada con la importancia de reflexionar de manera profesional acerca de la práctica docente, pasando a ser un objetivo importante en la formación de profesores, y más aún, una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. La constatación de la relevancia que tiene la reflexión sobre la práctica ha llevado al diseño e implementación de propuestas didácticas que favorezcan su desarrollo (Coles, 2014; Ponte, 2011; Star y Strickland, 2008).

Entre los enfoques teóricos que se han centrado en desarrollar herramientas y promover métodos de investigación sobre la reflexión del profesor (Gellert, Becerra y Chapman, 2013), hay que resaltar, entre otros, la investigación – acción (Eliot, 1993) que plantea una ayuda al maestro para profundizar la comprensión de su problema en una situación inicial; la práctica reflexiva (Schön, 1983) que da importancia a la reflexión sobre la acción; el Lesson Study como metodología de trabajo grupal para la reflexión (Hart, Alston y Murata, 2011); y las investigaciones sobre la competencia mirar con sentido profesional (Mason, 2002), en los cuales se trata de promover la reflexión del profesor sobre la acción, de manera individual o colectiva, identificando factores que afectan los procesos de instrucción y, así, tomar decisiones basadas en ella.

3.1. La reflexión sobre la práctica en la formación de profesores y los criterios de idoneidad en el modelo CCDM

En el modelo teórico de competencias y conocimientos de profesor de matemáticas (CCDM).

(Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), basado en constructos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019) se considera que las dos competencias clave son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de idoneidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Esta competencia está formada por diferentes subcompetencias: 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centraremos en esta última subcompetencia, en concreto en uno de sus componentes.

La subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica. Dicha noción (Breda, Font y Pino-Fan, 2018) es una respuesta parcial de la problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010): *Idoneidad Epistémica*, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas"; *Idoneidad Cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; *Idoneidad Interaccional*, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; *Idoneidad Mediacional*, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; *Idoneidad Emocional*, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción; *Idoneidad Ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional. En particular, la idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. En Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores para cada criterio que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La necesidad y utilidad de estos criterios se da en dos momentos del proceso de instrucción: primero para guiarlos (los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas") y, segundo, para valorar sus implementaciones (los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado).

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de componentes e indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, todos seguramente estaremos de acuerdo en que es necesario implementar unas "buenas" matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello. Para algunos criterios, los descriptores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de medios), para otros, como es el caso de la idoneidad epistémica es más difícil. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016), Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Breda et al (2021), se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. A continuación, se reproducen los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica (Breda y Lima, 2016, p. 80):

Tabla 1. *Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica*

Componentes	Indicadores
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad del objeto matemático	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), tratamientos y conversiones entre los mismos.

3.2. Idoneidad epistémica y complejidad del objeto matemático

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han elaborado considerando los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del Enfoque Onto Semiótico que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013). De este principio se deriva un componente (representatividad de la complejidad del objeto matemático) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas.

Este componente tiene su origen en la manera pragmática de cómo se entiende el significado de un objeto matemático en el EOS. Desde un punto de vista pragmático, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante. Es decir, supone disponer de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca. Cuando se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el pragmatismo, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos sentido y significado. En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc., para dar lugar a diferentes prácticas, podemos entender el sentido como un significado parcial, esto es, como un subconjunto (sentido) del sistema de prácticas en las que el objeto es determinante (significado).

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a generar sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no genera todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Según Font, Godino y Gallardo (2013), de acuerdo con el punto de vista pragmatista, para analizar un texto matemático y, más en general, la actividad matemática, sea profesional o escolar, es necesario contemplar como mínimo los siguientes elementos: 1) notaciones, representaciones (lenguaje), 2) situaciones-problema 3) definiciones, 4) procedimientos, técnicas, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc., y 6) argumentos. Estos seis tipos de elementos (llamados objetos primarios en el EOS) se articulan formando configuraciones de objetos llamadas epistémicas, y se pueden entender como un contexto intra matemático. Se trata de una herramienta que puede ser útil para describir la complejidad de los objetos matemáticos y de las prácticas de las cuales emergen. En el EOS, la introducción de la dualidad unitaria-sistémica permite reformular la visión "ingenua" de que "hay un mismo objeto matemático con distintas representaciones". Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las que el objeto matemático en cuestión no aparece directamente, lo que si aparece son representaciones del objeto, diferentes definiciones, proposiciones y propiedades del objeto, procedimientos que se le aplican y argumentos acerca del objeto (configuraciones de objetos primarios). Dicho de otra manera, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas para el estudio del objeto en cuestión, algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes.

Desde esta perspectiva, un criterio de idoneidad de un proceso de instrucción para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo posible del sistema de prácticas que son el significado del objeto. Dicho en términos de contextos, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos intra matemáticos representativa, una muestra de contextos que permita construir una muestra representativa de los diferentes sentidos del objeto. Por otra parte, una vez seleccionada una muestra representativa de contextos intra matemáticos, hay que seleccionar los contextos extra matemáticos que permiten hacer emerger las configuraciones epistémicas en las que se concretan dichos contextos intra matemáticos.

3.3. La reflexión sobre la complejidad del objeto matemático en la formación de profesores

En diferentes procesos de formación de profesores de matemáticas de España, México, Brasil, Ecuador, Chile, Panamá, Costa Rica, Venezuela y Argentina (Ramos, 2006; Ferreres y Vanegas, 2015; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Breda y Lima, 2016; Seckel, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Morales-López y Font, 2019), se han realizado un conjunto de investigaciones que tienen como finalidad investigar el uso del constructo criterios de idoneidad didáctica, propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Breda, Font y Lima, 2015; Breda, Font y Pino-Fan, 2018), como herramienta para organizar la reflexión del profesor a su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de la práctica, con el objetivo de desarrollar en los profesores la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.

Estas investigaciones han puesto de manifiesto los siguientes aspectos: 1) aunque no se incorpore explícitamente la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>>, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas (suyas o de otros) (Breda y Lima, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017). 2) Incorporar el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>> para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. En estos dispositivos formativos, se hace hincapié en la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global del objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad.

4. Metodología

La investigación es primordialmente cualitativa, puesto que el interés es primero describir, sobre todo, el desarrollo de un aspecto parcial de la competencia de los futuros profesores (analizar y valorar la idoneidad de procesos de instrucción). Tiene además un componente de desarrollo ya que, por un lado, se proporciona conocimiento detallado acerca del estado actual de la formación de profesores de secundaria (en formación y en servicio) en Ecuador y, por otro lado, se elabora recursos didácticos específicos para mejorar la formación de estos profesores.

Tabla 2. *Participantes de la investigación* (Fuente: Autores)

Formación Inicial: Futuros Profesores de Matemáticas	
Participantes	**Estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física. Universidad de Cuenca.**
Formación Continua: Profesores de Matemáticas en Ejercicio	
Participantes	**95 profesores de matemáticas de instituciones públicas y privadas, de diferentes provincias y ciudades del Ecuador. Trabajan en niveles de Educación General Básica superior (EGBS) y el Bachillerato General Unificado (BGU).**
Programa	**Máster en Formación Continua y Profesionalización Docente: Curso de dos años dividido en tres bloques: a) Bloque general (15 créditos ECTS); b) Bloque específico (21 créditos ECTS) y c) Bloque de Prácticum y Trabajos de Fin de Máster (TFM) (24 créditos ECTS).**
Asignatura Abordada	**Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica. Objetivos: Presentar propuesta de innovación y herramientas de valoración de la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor, la mejora de su propia práctica. Pretendía además hacer una iniciación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas y a la difusión de sus resultados.**

Se trata de diseñar e implementar ciclos formativos que en el EOS son considerados experimentos del desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor. Es un tipo de dispositivo que estudia el desarrollo profesional del profesor en formación o en servicio, y se fundamentan en los principios de los experimentos de enseñanza (Cobb *et al*., 2003), lo que significa que un equipo de investigadores estudia el desarrollo del profesor a la vez que lo promueve como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención. En este caso, dado que se pretende enseñar a los profesores participantes la importancia de tener en cuenta, para la enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático, una muestra representativa de los diferentes significados de dicho objeto en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas, el proceso de instrucción se diseñó teniendo en cuenta el siguiente principio:

para poder usar este componente en la valoración y rediseño de secuencias de tareas, el profesor, como mínimo, debe conocer los diferentes significados del objeto matemático a enseñar (significado holístico) y sus conexiones, debe conocer cuáles de estos significados están incluidos en el currículum y debe poder seleccionar y/o crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar.

Las muestras son intencionales ya que el dispositivo formativo se ha implementado con profesores de secundaria en un máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de Ecuador y con futuros profesores de una Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca, si bien la muestra no es estadísticamente representativa, puede ofrecer información relevante para la formación de profesores en el Ecuador.

Se diseñaron tareas específicas y se analizaron las producciones de los participantes con categorías a priori (tipos de significados del objeto matemático implicado) mediante un análisis de contenido para inferir el significado parcial usado; después se realizó una triangulación de expertos.

5. Resultados

En esta sección presentamos algunos de los resultados obtenidos, los cuales se han difundido por medio de diversas publicaciones. Un primer resultado de la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores documentado en Calle y Breda (2019) es que, como resultado de la experiencia realizada, los estudiantes en formación docente, son conscientes de que, para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, es necesario tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, entendida como las diferentes formas de comprender los significados y su aplicación en la resolución de problemas.

Un segundo resultado de la reflexión didáctica en la formación inicial de docentes sobre la complejidad de las nociones de combinatoria (Calle, Parra y Paucar, 2020) es que los participantes tienen dificultades para realizar el análisis de la actividad matemática, en particular sus comentarios sobre las dificultades que tuvieron muestran unos análisis poco detallados.

Un tercer resultado sobre los conocimientos de futuros profesores sobre los diferentes significados del objeto matemático media aritmética (Calle, Breda y Sala, 2020) es que es importante fomentar la reflexión de los futuros profesores sobre los diferentes significados de un objeto matemático, porque la presentación de una muestra representativa de esta variedad de significados permite que los estudiantes resuelven una variedad de problemas matemáticos adicionales.

Un cuarto resultado sobre qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio (Calle, Breda y Font, 2020a), es que, tener en cuenta el componente representatividad de la complejidad del objeto matemático, es elemento importante para su formación, pues, para el profesor, conocer una muestra representativa de significados de un objeto matemático, le permite trabajar con una diversidad de problemas, facilitando que los alumnos construyan una red de significados parciales, conectados entre sí, que les permita desarrollar la competencia matemática que les posibilita resolver diferentes tipos de problemas.

Un quinto resultado sobre los significados de las medidas de tendencia central contemplados por Profesores de Matemáticas en sus Trabajos de Fin de Máster (Calle, Breda y Font, 2020b), es que los profesores están de acuerdo en la importancia de considerar los diferentes significados de los objetos matemáticos en su proceso de enseñanza. Sin embargo, no saben cómo diseñar tareas con problemas de aplicación que respondan a esta diversidad de significados.

6. Conclusiones

Los resultados obtenidos, tanto en formación inicial como continua, muestran que los participantes, a pesar de las dificultados que tuvieron, consideran interesante la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su relación con el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos. Por otra parte, los participantes presentaron, en las tareas que diseñaron, diferentes significados de los objetos matemáticos, tanto intra como extra matemáticos, enfatizando en la importancia de tener en cuenta su complejidad, manifestando que los diferentes significados se deben ir presentando de forma gradual a los alumnos.

Las dificultades observadas en los profesores ecuatorianos en su reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos, es un resultado coherente con la investigación sobre la formación de los profesores en la región andina (Yamamoto y Malaspina, 2018) y, también, con la investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas, la cual ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

7. Reflexiones Finales

En los diferentes trabajos que se han realizado hasta la fecha, se ha presentado una situación muy similar y es que el incorporar el componente «muestra representativa de la complejidad del objeto matemático» para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado.

Reconocimiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: pgc2018-098603-B-I00 (mciu/aei/feder, ue).

Referencias

Bernal, J., Calle, E., Mora, M., y Guachún, F. (2019). Investigación en Educación Matemática, en Ecuador y la Región: Caso Universidad de Cuenca. En D. Aguilar, M. Cobos, L. Claudio, E. Campozano (Eds), *La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación* (pp. 53-65). Cuenca: ASEFIE.

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Breda, A., y Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Breda, A., Seckel, M. J., Farsani, D., Silva, J. F., y Calle, E. (2021). Teaching and learning of mathematics and criteria for its improvement from the perspective of future teachers: a view from the Ontosemiotic Approach. *Mathematics Teaching Research Journal, 13*(1), 31-51.

Calle, E., y Breda, A. (2019). Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores. En Daniel Aguilar, Martha Cobos, Luis Claudio Cortés, Enma Campozano (Eds), *La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación* (pp. 29-50). Cuenca: ASEFIE

Calle, E. C., Breda, A., y Font, V. (2020a) ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 643-652

Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2020b). Significados de las medidas de tendencia central contemplados por profesores de matemática en sus trabajos de fin de máster. En *5 Encuentro Internacional en Educación Matemática* (pp. 457-462). Barranquilla. Colombia: Universidad del Atlántico.

Calle, E., Breda, A. y Sala, G. (2020). Conhecimento de Futuros Professores sobre os Diferentes Significados do Objeto Matemático Média Aritmética. En XIV *Seminário Sul_Mato_Grossense de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 177-186). Rio Grande del Sur. Brasil: Universidade de Mato Grosso do Sul.

Calle, E., Parra, E., y Paucar, P. (2020). Reflexión didáctica en formación inicial de docentes sobre la complejidad de las nociones de combinatoria. En *IV Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de la Matemática* (pp. 33-50). Cuenca, Ecuador: Universidad de Cuenca.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Coles, A. (2014. Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactic, of a heightened listening. *ZDM*, *46*(2), 267-278.

Cortez, D. (2014). *Genealogía del sumak kawsay y el buen vivir en Ecuador: un balance. Post-Crecimiento y Buen Vivir. Propuestas globales para la construcción de sociedades equitativas y sustentables.* Friedrich-Ebert-Stiftung (FES): Quito.

Elliott, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción. Ediciones Morata.

Ferreres, S., y Vanegas, Y. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia*, *196*, 219-225.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Gellert, U., Becerra, R., y Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En K. M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (v. 27, pp. 327-360). Nueva York, NY: Springer-Verlag.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Hart, L. C., Alston, A., y Murata, A. (2011). Lesson study research and practice in mathematics education. *The Netherlands: Springer*.

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado 68*(24), 83-101.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* Londres: Routledge-Falmer.

Morales-López, Y., y Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educação e Pesquisa*, 45, e189468.

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C., y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime, 19*(1), 71-98.

Ponte, J. P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. En *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics* (pp. 249-261). Springer, Boston, MA.

Ramos, A. B. (2006). Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. el caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Schon, D. A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action* (p. 1983). New York: Basic Books.

Seckel M. J. (2016). Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Stahnke, R; Schueler, S., y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. ZDM, 48(1), 1-27.

Star, J., y Strickland, S. (2008). Learning to observe: Using video to improve pre-service mathematics teachers' ability to notice. Journal of Mathematics Teacher Education, 11(2), 107-125.

Yamamoto, Y., y Malaspina, U. (2018). Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges. Cham: Springer.

CAPÍTULO 16

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES PROPIAS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

DIDACTIC SEQUENCE FOR THE DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC THINKING SKILLS

Teresita de Jesús Daniel Ancheta,
Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
teresita.tdj96@gmail.com, ana.delcastillo@unison.mx
Universidad de Sonora

Resumen

El presente trabajo es un avance de tesis de maestría, que consiste en un proyecto de intervención didáctica centrado en el diseño de dos secuencias didácticas que promuevan el desarrollo de habilidades del pensamiento algebraico, tales como la generalización y la simbolización. Se consideró importante que las actividades pudieran ser tratadas como parte de los primeros acercamientos al álgebra. De acuerdo al plan y programas de estudio vigentes en México, las actividades están dirigidas a estudiantes de primer año de secundaria (de 12 y 13 años) y se utiliza el tema de sucesiones aritméticas para promover el desarrollo de las habilidades mencionadas anteriormente.
Palabras clave: *secuencia didáctica, pensamiento algebraico, generalización, simbolización.*

Abstract

The present work is a master's thesis advance which consists of a didactic intervention project focused on the design of two didactic sequences that promote the development of algebraic thinking skills, such as generalization and symbolization. It was considered important that the activities could be treated as a part of first approaches to algebra. According to the current study plan and programs in Mexico, the activities will be aimed at first year middle school students (from 12 to 13 yeas) and the subject of arithmetic sequences will be used to promote the development of the skills mentioned above.

Keywords: *didactic sequence, algebraic thinking, generalization, symbolization.*

1. Antecedentes

Autores como Radford han propuesto trabajar con sucesiones de figuras para el primer acercamiento al álgebra o *early algebra*, con la intención de comenzar a desarrollar habilidades del pensamiento algebraico. En uno de sus trabajos (Radford, 2006), menciona que las estrategias utilizadas pueden separarse en dos categorías: 1) La heurística basada en prueba y error (la cual no conduce a un pensamiento algebraico), y 2) Buscar una comunalidad en las figuras.

Por otro lado, Cortés, Hitt y Saboya (2016) llevaron a cabo también una investigación utilizando el tema matemático de las sucesiones de figuras con la intención de dar un nuevo enfoque a la transición de la aritmética al álgebra, traduciéndose a que consideran que este tema matemático es recomendable para ser un primer acercamiento al álgebra. En sus conclusiones mencionan que su actividad se ha basado en el fortalecimiento de la interacción entre la aritmética y el álgebra. Proponen que se deben tomar en cuenta prácticas como el reconocimiento de patrones y que la actividad debe ser presentada de manera que las conjeturas de los estudiantes puedan ser corroboradas.

Con la información anterior, se puede afirmar que los patrones o sucesiones de figuras se consideran como un tema matemático que puede posibilitar el desarrollo de habilidades como la generalización y simbolización, pudiendo ser este uno de los primeros acercamientos al álgebra. El plan de estudios vigente (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017) menciona los propósitos generales para la educación secundaria y los aprendizajes esperados correspondientes a cada tema. El aprendizaje esperado para el tema de patrones es que los alumnos formulen expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones y las utilice para analizar propiedades de la sucesión que representan (p. 178).

2. Problemática

Tradicionalmente, la enseñanza del álgebra se ha basado en la realización de procedimientos de manera repetitiva para los estudiantes, teniendo como consecuencia que éstos tengan poca capacidad de analizar lo realizado para detectar posibles errores, debido a que las estrategias están dominadas por procedimientos que no han sido interiorizados. Desde esta perspectiva, Velásquez (2012) menciona que observa que los estudiantes hacen un uso memorístico de las matemáticas, generando únicamente un aprendizaje a corto plazo, situación que va en contravía con el desarrollo de competencias.

Por lo anterior, se considera que es más significativo para los estudiantes desarrollar habilidades del pensamiento algebraico. Sin embargo, es un hecho que existen dificultades para hacer el tránsito, del pensamiento aritmético desarrollado en la escuela primaria, al pensamiento algebraico que se pretende desarrollar en la etapa de estudios en la escuela secundaria. Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) citando a Kieran, resaltan que estas dificultades se centran en la necesidad de manipular letras y dotar a esta actividad de significado. Además, la discontinuidad con los temas de aritmética, medida y geometría, sugieren que los temas relacionados con el álgebra aparecen de manera abrupta.

Así, el objetivo general y los objetivos del presente trabajo se formularon de la siguiente manera:

2. 1. Objetivo general

Diseñar secuencias didácticas basadas en el reconocimiento de patrones en sucesiones figurales para promover habilidades propias del pensamiento algebraico, como la generalización y la simbolización, dirigida a estudiantes de primer año de secundaria.

2. 2. Objetivos específicos

- Caracterizar los requerimientos curriculares para el tema de sucesiones aritméticas.

- Ubicar las principales dificultades que podrían tener los estudiantes para abordar las actividades propuestas.

- Identificar situaciones problemas, lenguaje apropiado, procedimientos, conceptos y argumentos para la elaboración de las secuencias didácticas.

- Valorar la pertinencia del diseño mediante su implementación.

3. Marco Teórico

Para llevar a cabo el trabajo de diseño, fue necesario seleccionar los elementos teóricos para el diseño y valoración de la propuesta. Se utilizaron parte de las herramientas que ofrece el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemático (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009). En especial, se consideraron los sistemas de prácticas y los objetos matemáticos primarios para caracterizar y determinar los significados sistémicos (de referencia, pretendido e implementado). Se seleccionaron los indicadores de la idoneidad didáctica para guiar el diseño y realizar las valoraciones correspondientes. Asimismo, se consideraron los niveles de algebrización desarrollados por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) tanto para el diseño como en la valoración de este.

4. Elementos metodológicos

Para el desarrollo del trabajo se consideran las siguientes fases y acciones:

FASE 1: ESTUDIO PRELIMINAR. Se hizo una revisión de planes y programas, así como de investigaciones relacionadas con el pensamiento algebraico; se caracterizaron y determinaron los significados institucionales, además de seleccionar los criterios de idoneidad y niveles de algebrización que servirían de apoyo como guía para el diseño.

FASE 2: DISEÑO. Se diseñaron dos secuencias didácticas, y después se realizó una valoración a priori de la misma utilizando los criterios e indicadores de las idoneidades didácticas, y se definió por actividad el nivel de algebrización que se favorecería.

FASE 3: IMPLEMENTACIÓN. La puesta en escena fue a través de la plataforma ZOOM. Se tuvo la participación de 9 estudiantes de primer año de secundaria, resultado de la gestión en una escuela secundaria pública, obteniendo el permiso de dirección y de los padres de familia para videograbar las sesiones con duración de una hora cada una, a lo largo de siete días. A lo largo de las sesiones, se ponía el manifiesto de significado institucional implementado.

FASE 4: ADECUACIÓN. A partir de la implementación, se realiza una valoración a posteriori de las secuencias didácticas con ayuda de la información recolectada (las hojas de trabajo, la videograbación e instrumentos de observación); utilizando los criterios e indicadores seleccionados, en conjunto con las características de los niveles de algebrización.

5. Secuencias didácticas y elementos para el diseño

A continuación, se presentan algunos elementos del estudio preliminar que se realizó, con el objetivo de contar con la información y elementos necesarios para comenzar con el diseño de las actividades, como la caracterización del significado de referencia, los sistemas de prácticas y objetos matemáticos que permitieron determinar el significado institucional pretendido.

5. 1. Caracterización del significado institucional de referencia: Sucesiones aritméticas

Al realizar la caracterización de los sistemas de prácticas y los objetos matemáticos primarios, fue posible conformar el significado de referencia de las sucesiones aritméticas. Para ello, fue necesario revisar el Plan y programas 2017, así como uno de los libros de Matemáticas 1 (Balbuena, Block y García, 2018), que se encuentra en la biblioteca *digital Comisión Nacional de libros de Textos Gratuitos* (CONALITEG) de la SEP. En este último, se propone tratar el tema de sucesiones en la semana 19, y le corresponden cuatro lecciones distintas: *Mosaicos*, *Símbolos en lugar de palabras*, *Construcción de sucesiones* y, por último, *Diferentes pero equivalentes*. Por razones de espacio, en este documento se mostrará mayor detalle del significado institucional pretendido.

5. 2. Determinación del significado institucional pretendido: Sucesiones aritméticas

A partir del significado institucional de referencia y los objetivos de este trabajo, antes mencionados, se determinaron los sistemas de prácticas y objetos primarios que se pretendían abordar en las secuencias didácticas diseñadas. A continuación, se presentan los elementos mencionados.

Sistemas de prácticas:

- Identificar y expresar patrones en una sucesión aritmética figural.
- Identificar y generar nuevos elementos de una sucesión aritmética.
- Calcular la cantidad de elementos en diferentes figuras de la sucesión.

- Expresar verbalmente los procedimientos realizados con números específicos.
- Expresar verbalmente los procedimientos que involucran cantidades indefinidas.
- Expresar de manera simbólica (palabras, letras, dibujos) cantidades indefinidas.
- Expresar de manera simbólica-literal la regla general de las sucesiones aritméticas.
- Calcular las diferencias entre elementos consecutivos de la sucesión en un lenguaje tabular.
- Identificar que la diferencia entre elementos consecutivos en una sucesión aritmética es constante.
- Representar con una gráfica cartesiana las sucesiones aritméticas.
- Identificar que, en una sucesión aritmética, los puntos que representan gráficamente a la sucesión están sobre una línea recta.
- Analizar las representaciones en lenguaje gráfico para determinar si son equivalentes.
- Analizar las representaciones en lenguaje simbólico literal para determinar si son equivalentes.
- Describir y expresar verbalmente las propiedades de las sucesiones aritméticas.

- Expresar en lenguaje figural una sucesión aritmética a partir de una regla dada.

Situaciones – Problemas:

- Identificación de los distintos elementos que conforman la sucesión figural.
- Construcción de las figuras siguientes que conforman la sucesión.
- Obtener la cantidad de elementos para determinado lugar en la sucesión.
- Descripción de los procedimientos llevados a cabo para el cálculo de cantidades definidas.
- Obtener la cantidad de elementos para cualquier lugar en la sucesión.
- Descripción de procedimientos en lenguaje verbal para determinar cantidades indefinidas.
- Descripción de procedimientos para calcular cantidades indefinidas con lenguaje simbólico.
- Determinación de una regla general con lenguaje simbólico-literal para representar la sucesión aritmética.
- Llenado de tablas con valores no consecutivos.
- Determinación de la diferencia constante entre términos consecutivos.

- Construcción de gráficas lineales discretas para representar una sucesión aritmética.

- Identificación de las propiedades de las sucesiones aritméticas en lenguaje numérico.

- Identificación de las propiedades de las sucesiones aritméticas en lenguaje gráfico.

- Comprobación de funcionalidad de la regla general encontrada.

- Colaboración grupal para analizar la equivalencia entre las distintas expresiones algebraicas encontradas utilizando las gráficas de estas.

- Determinación de las reglas generales más eficientes.

- Construcción de sucesiones aritméticas figurales a partir de una regla general dada.

- Identificación de expresiones algebraicas equivalentes.

- Determinación de la equivalencia entre expresiones algebraicas.

Lenguajes:

- Figural, para presentar la sucesión aritmética y analizarla para partir hacia los distintos tipos de lenguajes.

- Natural, para presentar las distintas situaciones problema, además de describir procedimientos, cantidades indefinidas y propiedades.

- Numérico, para dar respuesta a cantidades específicas y en su procedimiento.
- Simbólico o simbólico-literal, para representar la regla general de una sucesión.
- Tabular, para modelar sucesiones aritméticas y analizar la diferencia constante entre términos consecutivos.
- Gráfico, para modelar sucesiones aritméticas y analizar sus propiedades.

Procedimientos:

- Contar la cantidad de elementos en la figura.
- Calcular la diferencia entre términos consecutivos y su constante independiente.
- Transformar las operaciones numéricas a una descripción general.
- Calcular la cantidad de elementos para el lugar de un término y viceversa.
- Completar tablas relacionando el lugar del término con la cantidad de elementos.
- Graficar relacionando el eje (lugar que ocupa un término) con el eje (cantidad de elementos).

- Sustituir el valor de en las expresiones algebraicas.

- Hacer transformaciones algebraicas.

Conceptos:

- Sucesión
- Sucesión aritmética
- Diferencia constante
- Expresión algebraica
- Literales
- Números naturales
- Gráfica de puntos
- Enésimo término
- Expresiones algebraicas equivalentes

Proposiciones:

- En una sucesión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

- La regla para relacionar el número de figura con la cantidad de ciertos elementos en ella es útil para cualquier número de figura.

- Sustituir de la expresión de la sucesión por números naturales, ayuda a encontrar todos los números pertenecientes a la sucesión aritmética.

- Al contar de distinta manera las figuras en una sucesión, se obtienen diferentes expresiones equivalentes.

Argumentos:

- Para justificar los procedimientos, afirmaciones y resultados obtenidos

5. 3. Diseño preliminar de las secuencias didácticas

El diseño de las secuencias didácticas consta de nueve actividades en total, las cinco primeras correspondientes a la primera secuencia y las cuatro restantes correspondientes a la segunda secuencia. Además, también cuentan con la característica de estar distribuidas como actividades de inicio, desarrollo y cierre (Díaz Barriga, 2013).

En la primera secuencia didáctica, se utiliza como contexto general la construcción de un muro fronterizo entre E.E.U.U. y México. Se descompone en distintas sucesiones aritméticas los elementos que conforman su construcción (cemento, celdas solares, barrotes, columnas y longitud), explorando sus propiedades en distintos lenguajes. La complejidad de las actividades se ve definida por los niveles de algebrización, pretendiendo que los alumnos lleguen a contestar los problemas hasta con un nivel 2 de algebrización.

En la segunda secuencia didáctica, el contexto utilizado en sus 4 actividades gira entorno a la instalación de postes de luz en la ciudad de Hermosillo. Al igual que en la anterior, se descompone en distintas sucesiones aritméticas los elementos que la conforman (postes de luz, focos y tornillos). Se espera que los alumnos logren dar respuesta a los problemas hasta con un nivel 3 de algebrización.

El objetivo general y los objetivos específicos de las secuencias se presentan a continuación:

Objetivo General: Alcanzar un nivel 3 de algebrización a través de caracterizar las sucesiones aritméticas, partiendo de situaciones problema que incluyen sucesiones de figuras.

Objetivos específicos:

- Analizar situaciones problema que incluyen lenguaje figural e interpretarlo en lenguaje verbal utilizando argumentos y proposiciones adecuados.

- Resolver problemas utilizando lenguaje tabular analizando las diferencias entre términos consecutivos.

- Encontrar las propiedades de una sucesión aritmética representada en lenguaje gráfico utilizando el plano cartesiano.

- Expresar con lenguaje simbólico-literal la regla general que representa la sucesión aritmética.

- Reconocer la equivalencia de dos sucesiones aritméticas a través de las expresiones algebraicas.

5. 3. 1. Niveles de algebrización en el diseño

La utilización de los niveles de algebrización en el diseño de las actividades permitió establecer los límites entre cada tipo de actividad (inicio, desarrollo y cierre); sin embargo, dentro de una misma actividad es posible observar distintos niveles, y a continuación se explica cómo.

Nivel 0: ausencia de razonamiento algebraico. Las situaciones de nivel 0 solo son observadas en las dos actividades de inicio donde se presenta el problema. No se espera que el alumno lleve a cabo prácticas que le permitan razonar algebraicamente debido a que solo se pretende que identifique la situación y los elementos con los que trabajará más adelante.

Nivel 1: nivel incipiente de algebrización. Este nivel puede ser apreciado en la actividad de inicio de la primera secuencia y en la de desarrollo de esta misma. En las preguntas, se les solicita a los alumnos hacer cálculos con cantidades específicas para que poco a poco lleguen a obtener un procedimiento general que puedan verbalizar.

NIVEL 2: NIVEL INTERMEDIO DE ALGEBRIZACIÓN. Este nivel, se espera que aparezca desde la actividad de cierre de la primera secuencia didáctica debido a que se formaliza el uso de la literal n para reemplazar los símbolos que habían estado utilizando para expresar la generalidad encontrada. El uso de n continuará en la segunda secuencia, durante sus 4 actividades, incluyendo también el concepto de enésimo término.
NIVEL 3: NIVEL CONSOLIDADO DE ALGEBRIZACIÓN. Este nivel será únicamente logrado cuando él o la alumna sea capaz de realizar transformaciones algebraicas. Esto implica que sea capaz de encontrar expresiones algebraicas equivalentes, ya sea identificando la equivalencia a partir de contar de manera distinta el crecimiento de la sucesión figural presentada o simplificando la expresión encontrada.

6. Análisis a priori

Antes de llevar a cabo la puesta en escena de las actividades, se realizó una valoración con base en los criterios de idoneidad didáctica y sus respectivos indicadores. A continuación, se describe cada una de estas.
Idoneidad epistémica: Se espera que con las actividades diseñadas, los estudiantes sean capaces de desarrollar sistemas de prácticas que los ayude a construir el significado pretendido sobre las sucesiones aritméticas. Los puntos tomados en cuenta para la valoración sobre la idoneidad epistémica son los siguientes:

- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones para identificar, construir y describir el patrón (sucesión aritmética).

- Se hace uso de distintos modos de expresión matemática (figural, natural, numérica, simbólica, tabular y gráfica) para las situaciones planteadas.

- El nivel de lenguaje es adecuado a estudiantes de primer año de secundaria (de 12 a 13 años).

- Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones o procedimientos.

- Las definiciones y procedimientos utilizados en el diseño son claros, correctos y adaptados a primer año secundaria.

- Se presentan procedimientos fundamentales del tema de sucesiones aritméticas.

- Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí.

Idoneidad cognitiva: Para la valoración de la idoneidad cognitiva, se consideró que el significado pretendido estuviera en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, de acuerdo a lo planteado y descrito en el Plan y programas 2017. A continuación, los puntos tomados en cuenta:

- Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar debido a que tienen una dificultad alcanzable.

- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.

- Se busca promover el acceso y el logro de todos los estudiantes.

Idoneidad interaccional: Para la planificación de la secuencia didáctica se consideraron los siguientes puntos relacionados con la idoneidad interaccional:

- Realizar una presentación adecuada de las sucesiones aritméticas.
- Reconocer y resolver los conflictos de los estudiantes.
- Buscar llegar a consensos con base al mejor argumento.
- Favorecer el diálogo y la comunicación entre los estudiantes.
- Favorecer la inclusión en el grupo y evitar la exclusión.
- Contemplar momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad de estudio.
- Observación del progreso cognitivo de los estudiantes.

Idoneidad mediacional: La implementación tuvo que adecuarse a realizarse por videoconferencias, y no de manera presencial. Los puntos tomados en cuenta son los siguientes:

- Se utilizan hojas de trabajo para responder las actividades.
- Un horario adecuado para llevar a cabo el curso.
- El tiempo es suficiente para la enseñanza pretendida.
- Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Idoneidad afectiva: Para el diseño de las actividades se consideraron contextos cercanos y conocidos a la realidad de los estudiantes, con la intención de que los estudiantes pudieran cuestionar y opinar acerca de los resultados obtenidos, Los puntos tomados en cuenta son los siguientes:

- Promover el interés de los estudiantes en las tareas.
- Proponer situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
- Promover la participación, perseverancia, participación, etc.
- Favorecer la argumentación en situaciones de igualdad.

Idoneidad ecológica: Para la valoración de esta idoneidad, fue contemplado que el contenido de las actividades diseñadas fuera correspondiente a las directrices curriculares en el plan y programas vigente.

A priori, la valoración de las secuencias didácticas es positiva debido a que el diseño fue guiado por componentes e indicadores, con la finalidad de obtener un alto grado de idoneidad.

7. Análisis a posteriori de los Niveles de Algebrización detectados en la implementación

Se consideró conveniente hacer un análisis de las respuestas de los estudiantes bajo los criterios o características que se detallan en los Niveles de Algebrización para evaluar el cumplimiento de los objetivos, ya que desde un inicio se contempló hacerlo al considerarlos para el diseño de las actividades. Recordemos que, de acuerdo a Godino, Aké y Wilhelmi (2014) el nivel de algebrización se asigna a la actividad matemática que realiza el estudiante, por lo que dependiendo de la manera en la que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. A continuación, se muestra una de las respuestas de los estudiantes donde es posible apreciar las distintas prácticas matemáticas correspondientes a uno de los niveles de algebrización.

En la *Actividad 1. 4. d*, después de haber resuelto problemas referentes a encontrar cantidades específicas, se pide a los estudiantes que describan el procedimiento que les permita expresar cómo encontrar la cantidad de barrotes necesarios para cualquier número de piezas de muro (expresar una generalización en lenguaje natural y simbólico). De manera explícita se le pide una respuesta correspondiente a un nivel 2 de algebrización, donde ya no únicamente realice operaciones para encontrar el valor faltante. Sin embargo, los estudiantes afirmaron que no habían tenido un acercamiento al uso de literales y no se formalizó como tal ese nivel, lo que se manifiesta por la falta de lenguaje simbólico-literal. En su lugar, siguen manifestando un nivel 1 de algebrización, asignándole un significado a los símbolos utilizados para expresar la generalidad encontrada.

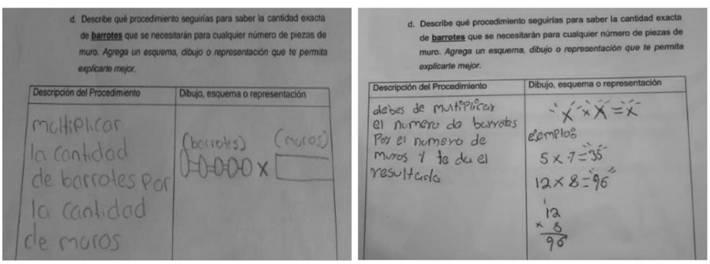


Figura 1. Actividad 1. 4. d

7.1 Análisis a posteriori bajo los Criterios de Idoneidad Didáctica

Con base en la información recolectada, las características de la puesta en escena y considerando los criterios de idoneidad didáctica y sus respectivos indicadores, se presenta una valoración a posteriori de la secuencia didáctica propuesta de manera resumida, rescatando aquellos aspectos más relevantes.

IDONEIDAD EPISTÉMICA: Se considera que la valoración de la idoneidad epistémica es alta, ya que se logró cumplir con todos los indicadores seleccionados en la valoración a priori. Además, a través de las hojas de trabajo se logró identificar la gran mayoría de los sistemas de prácticas y objetos matemáticos primarios pretendidos con la secuencia.

IDONEIDAD COGNITIVA: La idoneidad cognitiva fue valorada como media alta, debido a que, durante la implementación de las actividades, aunque se observaron casos en los cuales los estudiantes lograban expresar un lenguaje que conllevaba un proceso de generalización y simbolización, incluyendo en sus procedimientos características de los tres niveles de algebrización, hubo algunos estudiantes que no lograron hacerlo. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes pudieron desarrollar los sistemas de prácticas, así como los objetos matemáticos esperados. Además de haberse valorado bajo los indicadores seleccionados en el análisis a priori, se consideró importante realizar la valoración por actividades, donde los objetivos didácticos fuesen evidentes. De éstas, se analizan las respuestas satisfactorias y también aquellas que muestran dificultades o errores. A continuación, se muestran un ejemplo:

ODE 1: Analizar situaciones problema que incluyen lenguaje figural e interpretarlo en lenguaje verbal utilizando argumentos y proposiciones adecuados.

Situación problema: Actividad 1: 4. d. Describe qué procedimiento seguirías para saber la cantidad exacta de barrotes que se necesitarán para cualquier número de piezas de muro. Agrega un esquema, dibujo o representación que te permita explicarte mejor.

En las tres respuestas satisfactorias es posible apreciar que describen y ejemplifican cierto grado de generalidad, utilizando palabras como "*la cantidad de*", "*por cada*" y "*el número de*" para referirse a las incógnitas o valores desconocidos. En la primera respuesta, la estudiante ejemplifica su descripción con símbolos de referencia parecidos a la realidad, acompañados de los conceptos que representa e indicando que se multiplican. En la segunda respuesta satisfactoria, el estudiante utiliza el apartado de representar para ilustrar con otro ejemplo que entiende que el 12 siempre aparecerá para encontrar la cantidad de barrotes y que la cantidad de muros será la cambiante. En la tercera respuesta satisfactoria, el estudiante representa su descripción con letras como un primer intento de expresar generalidad; identifica que los números cambiarán dependiendo del contexto pero aún no es capaz de comprender que una misma literal no puede representar diferentes objetos, en el sentido que no puede ser a la vez el número de barrotes, muros y el resultado.

Idoneidad afectiva e idoneidad interaccional: Ambas son valoradas como altas debido a que cumplió satisfactoriamente con los indicadores antes seleccionados.

Idoneidad mediacional: Se valora la idoneidad mediacional como media debido a que sólo fue posible trabajar con hojas de trabajo impresas, considerando la situación limitada de recursos con los que cuentan las familias de los estudiantes con los que se trabajó. Además, se tuvieron problemas técnicos, por ejemplo: Los micrófonos de los estudiantes fallaban, mala conexión de internet, se encontraban con otros miembros de su familia, había mucho ruido ajeno a sus casas, etc.

Idoneidad ecológica: Se valora la idoneidad ecológica como alta debido a que desde un inicio se planificaron las secuencias didácticas con base en los lineamientos en el plan y programas vigentes, además de tomar como directriz las orientaciones didácticas propuestas en el mismo documento, y en uno de los libros de Matemáticas 1 utilizado en las escuelas secundarias en México. Para finalizar, por cuestiones de la pandemia ocasionada por el COVID-19, toda la implementación fue planificada para llevarse a cabo en las mejores condiciones posible.

8. Consideraciones Finales

De acuerdo al diseño, implementación y valoración de las secuencias didácticas presentadas se aprecia la utilidad de las herramientas teóricas proporcionadas por el EOS. El papel del reconocimiento de patrones en sucesiones figurales para promover la generalización y la simbolización se mostró también relevante. Sin embargo, es importante considerar las limitaciones impuestas por las condiciones actuales, derivadas de la pandemia, para analizar posibles adecuaciones que tendrían que hacerse a la secuencia para implementarse de manera presencial.

Referencias

Cortés, J., Hitt, F. y Saboya, M., (2016). *Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. Bolema*, 30(54), 240- 264.

Balbuena, H., Block, D., García, S., (2018). *Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más*. México: Editorial Ediciones SM.

Díaz Barriga, A. (2013) *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. México D. F., UNAM

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J., Castro, W., Aké, L., Wilhelmi, M., (2012). *Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental*. *Bolema*, *26*(42B), 483-511.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). *Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros*. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Radford, L., (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective*. En Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, ed. S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz, and A. Méndez, Vol. 1, 221. Mérida, México.

Secretaría de Educación Pública [SEP], (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Planes y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. CDMX, México.

Velásquez Naranjo, L. J. (2012). *Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado cuarto de básica primaria.* Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Desde el Sur
cultivamos saberes, cosechamos libros

Este libro se terminó de componer en el invierno de 2022. En su formación se utilizaron las fuentes Chercán, de Francisco Gálvez en su variante negra para títulos y Berenjena de Javier Quintana para el texto, en sus variantes fina, fina italic y negra. En el interior se utilizó papel Bond Ahuesado de 80 g y Couché Opaco de 300 g para la tapa. Su encuadernación es rústica, costura al hilo y entape hotmelt. Para esta edición se imprimieron 500 ejemplares. Desde el Sur cultivamos saberes, cosechamos libros, editorial@ulagos.cl, editorial.ulagos.cl. Cochrane 1070; Osorno.