

Apuntes **Mecánica General**



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
EDITORIAL

APUNTES
MECÁNICA GENERAL

AUTOR

Luis Alejandro Rozas Torres

Ingeniero Civil Estructural, y MSc. mención Ingeniería Sísmica Universidad de Chile.

Profesor asociado del Departamento de Ciencias de la Ingeniería, Universidad de los Lagos.



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
EDITORIAL

“Apuntes mecánica General”
217 páginas, 20x25cm cerrado
ISBN: 978-956-6383-31-4

Primera edición, 2026
Autor: Luis Alejandro Rozas Torres
Portada y maquetación: María José Hernández Segovia

Este trabajo fue financiado por la Dirección de Docencia
y Pregrado a través del fondo de Innovación en la Docencia
de la Universidad de Los Lagos.

Se autoriza la reproducción parcial o total de este libro
citando a la fuente correspondiente.
Prohibida su comercialización.

Impreso en Chile

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	9	5.6. Problemas capítulo 5	116
2. Cinemática de la partícula	11	6. Vibraciones mecánicas	144
2.1. Sistemas de coordenadas	17	6.1. Oscilaciones libres	144
2.1.1. Coordenadas polares	18	6.1.1. Caso no amortiguado	144
2.1.2. Coordenadas cilíndricas	21	6.1.2. Caso amortiguado	148
2.1.3. Coordenadas esféricas	21	6.2. Oscilaciones forzadas y reso-	
2.2. Problemas capítulo 2	23	nancia	152
3. Dinámica de la partícula	47	6.2.1. Caso no amortiguado	152
3.1. Leyes de movimiento de Newton	48	6.2.2. Caso amortiguado	156
3.2. Momento angular	51	6.3. Problemas capítulo 6	160
3.3. Fuerzas centrales y leyes de		7. Dinámica lagrangiana y mínima	
Kepler	53	acción	176
3.4. Problemas capítulo 3	61	7.1. Coordenadas generalizadas	176
4. Energía de la partícula	75	7.2. Restricciones	178
4.1. Teorema de trabajo y energía	75	7.3. Desplazamientos virtuales	
4.2. Energía potencial y fuerzas		y trabajo virtual	180
conservativas	76	7.4. Principio de d'Alembert	181
4.3. Problemas capítulo 4	82	7.5. Fuerzas generalizadas	186
5. Sistemas de partículas	102	7.6. Ecuaciones de Lagrange	187
5.1. Centro de masa	102	7.7. Cálculo variacional	192
5.2. Momento angular de un		7.8. Ecuación de Euler-Lagrange	195
sistema de partículas	107	7.9. Principio de mínima acción	
5.3. Energía cinética de un siste-		de Hamilton	200
ma de partículas	110	7.10. Problemas capítulo 7	202
5.4. Cinemática plana de cuerpos		8. Bibliografía	217
rígidos	111		
5.5. Energía cinética de un cuerpo			
rígido en movimiento plano	115		

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El presente documento constituye una recopilación de pautas de pruebas y tareas del curso Mecánica General, curso que he dictado en la Universidad de los Lagos desde el año 2019. El objetivo de este material es el de presentar al estudiante la clase de problemas a los que podría verse enfrentado durante las evaluaciones de la asignatura. Los ejercicios contenidos en este apunte son originales y en su elaboración se ha evitado caer en problemas rutinarios que supongan una aplicación repetitiva de métodos de resolución. Por el contrario, cada problema propone una situación diferente que motiva al estudiante a usar nuevos métodos o formas de solución, promoviendo así la comprensión de los conceptos de mecánica más que su simple memorización. El apunte también incluye en cada capítulo un breve resumen de los conceptos e ideas fundamentales que se discuten en clases, no pretendiendo ser sin embargo sustituto de las mismas. En la mayoría de las soluciones a los problemas presentados aquí, parte del desarrollo algebraico ha sido omitido mostrándose solo los pasos más relevantes de la solución. Esto último no es casualidad ya que los pasos intermedios se han dejado como trabajo para el estudiante. Mi experiencia es que de esta manera se promueve la ejercitación y el aprendizaje, por sobre la mera lectura pasiva de las soluciones.

Es importante mencionar los conocimientos previos que se deben poseer cuando se toma por primera vez este curso. En este sentido resultan fundamentales la adecuada comprensión de Geometría, Trigonometría, Álgebra y Cálculo diferencial e integral. Muchos de los problemas involucran en su desarrollo la resolución de problemas geométricos, en los que resulta clave el uso de trigonometría. A su vez el Cálculo diferencial e integral también es necesario para la resolución de problemas de cinemática así como en la determinación de los momentos de inercia y en el planteamiento de las ecuaciones de movimiento a partir de la dinámica de Lagrange. Asimismo, en la mayoría de los problemas que se presentan en este apunte, se hace especial énfasis en la resolución algebraica por sobre las soluciones numéricas. Esta manera de enfrentar los problemas no es casual ya que un buen manejo del álgebra no solo es de gran importancia para todo futuro ingeniero, sino que además esta provee resultados generalizables y que a su vez pueden ser posteriormente escritos en programas computacionales desde Excel® a Matlab®. La formulación algebraica amplía

por tanto el alcance de los resultados lo que permite a su vez realizar análisis posteriores y obtener conclusiones que posibilitan una comprensión en mayor profundidad del problema bajo estudio.

Finalmente, y no menos importante, me gustaría agradecer la valiosa colaboración de Luis Francisco Ortega Villagra estudiante de la carrera de Ingeniería Civil quien no solo ha traspasado numerosas pautas y cálculos escritos a mano, cosa nada fácil teniendo en cuenta mi a veces ilegible caligrafía, sino que también colaboró en la elaboración de muchas de las figuras que contiene este apunte. Sin su ayuda la elaboración de estos apuntes no hubiera sido posible.

Como primera versión este apunte puede contener errores. Si el lector encontrase algún error se ruega señalarlo a: luis.rozas@ulagos.cl

Luis Rozas Torres
Puerto Montt, marzo 2026

CAPÍTULO 2

Cinemática de la partícula

La cinemática es una rama de la física matemática que tiene como objetivo la descripción del movimiento de cuerpos rígidos o puntuales, sin importar las fuerzas que causan dicho movimiento. En este primer capítulo nos limitaremos al estudio del movimiento de cuerpos puntuales. Un cuerpo puntual es un cuerpo que no posee dimensiones físicas y como tal no existe en la naturaleza. No obstante lo anterior, en muchos casos resulta útil la idealización de cuerpo puntual sobre todo cuando la trayectoria descrita por el objeto es muy grande en comparación con el tamaño del mismo. Como ejemplos de esto último se cuentan el movimiento de los planetas o los satélites que orbitan en torno a la Tierra. A menudo también, no nos interesa conocer los movimientos internos de un cuerpo, tales como las rotaciones en torno a alguno de sus ejes, en estos casos también resulta útil la idealización de cuerpo puntual.

Consideremos una partícula P que ejecuta un movimiento en el espacio. Para describir la posición de la partícula en función del tiempo definimos el vector posición, que denotamos $\mathbf{r}(t)$, como aquel vector cuyo origen coincide con el origen del sistema de coordenadas y cuyo extremo final coincide con la posición de la partícula, tal y como se indica en la Figura 2.1.

Podemos escribir el vector posición de la partícula P en coordenadas cartesianas con la ayuda de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$. Tal como indica su nombre estos vectores poseen magnitud unitaria, y son a su vez paralelos a los ejes X , Y y Z respectivamente, por lo tanto, tenemos:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (2.1)$$

la expresión anterior puede ser también escrita de manera abreviada como

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle \quad (2.2)$$

Sin importar la forma en que describamos la posición de la partícula, ya sea mediante la expresión 2.1 o 2.2, es importante recordar que cada una de las componentes del vector posición son funciones que dependen del tiempo. En efecto, para describir el movimiento de un proyectil en ausencia de resistencia aerodinámica lanzado con rapidez inicial v_0 e inclinación inicial θ , el vector posición se expresa como:

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta t) \hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t \right) \hat{\mathbf{j}} \quad (2.3)$$

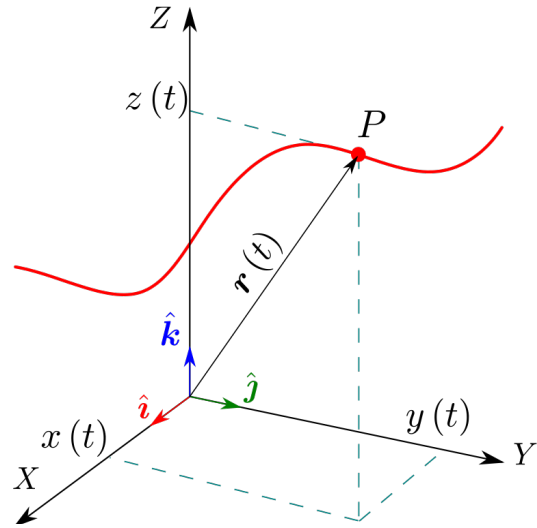


Figura 2.1: La ubicación de la partícula P queda definida por su vector posición $\mathbf{r}(t)$.

Una vez que conocemos la posición de una partícula la siguiente pregunta que nos surge es, ¿cuál es su velocidad? Antes de responder a esta pregunta debemos darle un significado a lo que entendemos por velocidad. Entendemos por velocidad a la tasa de cambio de la posición de la partícula con respecto al tiempo. Así por ejemplo, si conocemos la posición de una partícula en un determinado instante de tiempo, digamos $\mathbf{r}(t)$, y conocemos también su posición en un instante de tiempo posterior, $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, el cambio de posición dividido por el intervalo de tiempo transcurrido, nos entrega la velocidad promedio de la partícula durante dicho intervalo de tiempo. Expresado en términos matemáticos lo anterior se escribe como:

$$\mathbf{v}_{\text{prom}}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (2.4)$$

en donde $\mathbf{v}_{\text{prom}}(t)$ corresponde a la velocidad promedio de la partícula en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. Es importante notar que la velocidad es una magnitud vectorial, ya que corresponde a la resta de los vectores posición de la partícula. Para determinar la velocidad que posee la partícula justo en el instante de tiempo t , que denominamos como velocidad instantánea, y notamos por $\mathbf{v}(t)$, podemos usar la expresión 2.4 pero haciendo que el intervalo de tiempo Δt sea cada vez más pequeño. En efecto, a medida que Δt disminuye

obtendremos una mejor aproximación de la velocidad instantánea de la partícula. En el límite cuando Δt se hace cero obtendremos finalmente la velocidad instantánea, es decir

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (2.5)$$

la expresión anterior corresponde a la derivada con respecto al tiempo del vector posición, por tanto podemos escribir

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.6)$$

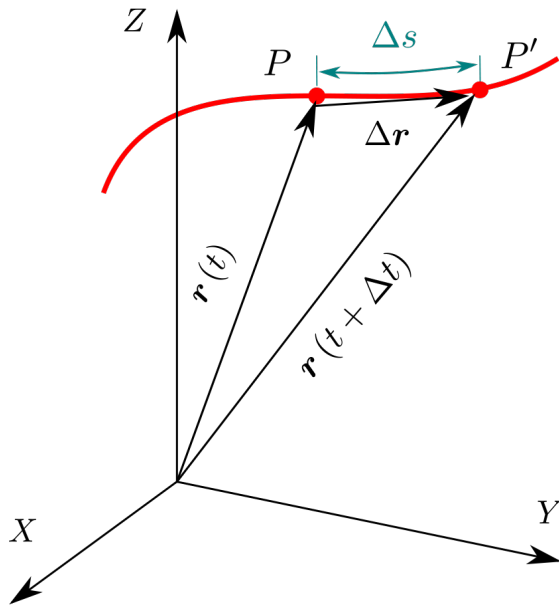


Figura 2.2: Cambio de posición y distancia recorrida de una partícula entre P y P' en t y $t + \Delta t$.

En la Figura 2.2 se muestra una partícula y su posición en el instante de tiempo t y el instante de tiempo $t + \Delta t$. La distancia recorrida por la partícula entre estos dos instantes de tiempo vienen dada por la longitud de su trayectoria entre los puntos P y P' que tal como se indica en la Figura 2.2 es Δs . Usando la regla de la cadena podemos reescribir la ecuación 2.6 como

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (2.7)$$

La segunda derivada del lado derecho de la ecuación 2.7 corresponde a la tasa de cambio de la distancia recorrida por la partícula con respecto al tiempo, en otras

palabras corresponde a su rapidez, $v(t) = ds/dt$. Por otro lado la primera derivada, que en este caso es un vector, corresponde a la tasa de cambio de la posición de la partícula con respecto a su distancia recorrida. Vemos de la Figura 2.2 que si Δt es lo suficientemente pequeño, es decir, cuando P y P' están próximos entre sí, se cumple que $|\Delta \mathbf{r}| \approx \Delta s$. En el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos $|\mathbf{dr}| = ds$. De lo anterior se desprende que la magnitud del vector $d\mathbf{r}/ds$ es igual a uno. Notamos además que a medida que $\Delta t \rightarrow 0$ el vector

$d\mathbf{r}$ se convierte en un vector tangente a la trayectoria en P . Estos últimos resultados nos permiten establecer:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \hat{\mathbf{t}} \quad (2.8)$$

en donde $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector tangente unitario a la trayectoria de la partícula en el punto P . Finalmente podemos concluir

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \hat{\mathbf{t}} \quad (2.9)$$

La ecuación anterior nos indica que la velocidad de la partícula es un vector cuya magnitud es igual a su rapidez, y que es siempre tangente a la trayectoria que recorre la misma.

En el análisis del movimiento de la partícula a menudo necesitamos conocer como varía la velocidad. Definimos la aceleración como la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. La aceleración es un parámetro importante en la descripción del movimiento de un objeto, ya que está directamente relacionada con la fuerza neta que actúa sobre el mismo, tal y como lo establece la segunda ley de Newton. Para determinar la aceleración, derivamos con respecto al tiempo la ecuación 2.9. Se debe tener presente que el vector $\hat{\mathbf{t}}$ varía con respecto al tiempo, dado que al ser siempre tangente a la trayectoria descrita por la partícula cambia su dirección a medida que la partícula se mueve. Teniendo en cuenta lo anterior obtenemos

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v(t) \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} \quad (2.10)$$

en donde hemos usado la regla de derivación para el producto de funciones. La primera derivada del lado derecho de la ecuación anterior, corresponde a la tasa de cambio de la rapidez con respecto al tiempo y equivale a la aceleración tangencial de la partícula, $a_t(t)$. En la Figura 2.3 se muestra la posición de la partícula en dos instantes de tiempo consecutivos t y $t + \Delta t$. Para cada una de estas posiciones se muestran también los correspondientes vectores tangentes unitarios $\hat{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{t}} + \Delta\hat{\mathbf{t}}$. Podemos dibujar cada uno de los vectores tangentes unitarios de manera tal que sus inicios coincidan con el centro de una circunferencia de

radio uno, tal y como se indica a la derecha de la Figura 2.3. Por tanto, la magnitud del cambio del vector tangente se puede expresar como

$$|\Delta \hat{t}| = 2 \sin \left(\frac{\Delta \theta}{2} \right) \quad (2.11)$$

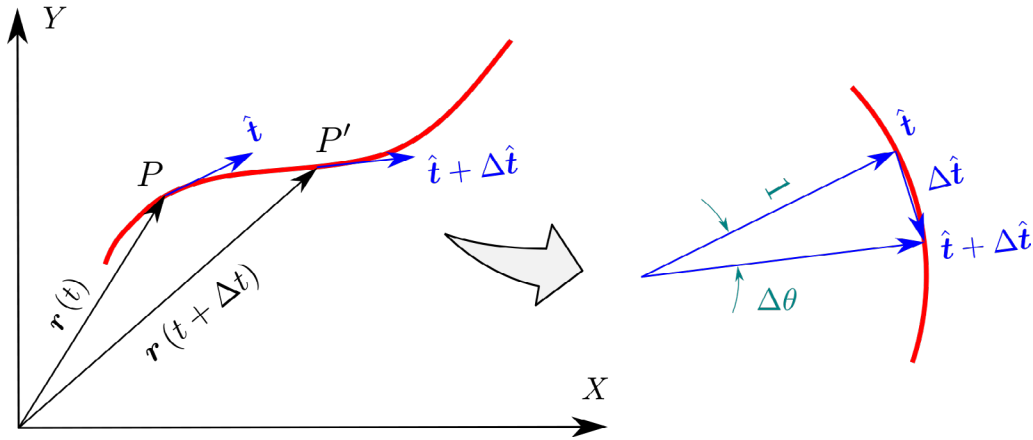


Figura 2.3: Vectores tangentes unitarios correspondientes a las posiciones P y P' de la partícula. Además se muestra $\Delta \hat{t}$ que corresponde al ángulo entre los vectores tangentes unitarios para las posiciones P y P' .

donde $\Delta \theta$ es el ángulo entre los vectores tangentes unitarios correspondientes a la posición P y P' de la partícula. Reordenando la ecuación anterior

$$\left| \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \theta} \right| = \frac{\sin (\Delta \theta / 2)}{\Delta \theta / 2} \quad (2.12)$$

tomando límite cuando $\Delta \theta \rightarrow 0$ y recordando que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, la ecuación anterior se convierte en

$$\left| \frac{d\hat{t}}{d\theta} \right| = 1 \quad (2.13)$$

De la Figura 2.3 también se desprende que a medida que $\Delta \theta \rightarrow 0$ el vector $\Delta \hat{t}$ se

hace perpendicular al vector tangente unitario. Este último resultado en conjunto con la ecuación 2.13 nos permite concluir que

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta} = \hat{\mathbf{n}} \quad (2.14)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario. Usando la regla de la cadena podemos escribir

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (2.15)$$

lo que equivale a

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \hat{\mathbf{n}} \frac{d\theta}{ds} v(t) \quad (2.16)$$

Sabemos también que se cumple $ds = \rho d\theta$, donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula, por lo tanto

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \hat{\mathbf{n}} \frac{v(t)}{\rho} \quad (2.17)$$

reemplazando este último resultado en la ecuación 2.10 obtenemos

$$\mathbf{a}(t) = a_t(t) \hat{\mathbf{t}} + \frac{v(t)^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}} \quad (2.18)$$

La ecuación 2.18 nos indica que la aceleración de la partícula puede ser descrita mediante una componente tangencial a la trayectoria y una componente normal a la misma. La componente tangencial junto con la componente normal forman el denominado sistema de referencia propio o intrínseco que para cada punto de la trayectoria de la partícula queda definido por el vector tangente unitario y normal unitario. En la sección siguiente discutiremos acerca de los distintos tipos de sistemas coordenados que pueden ser utilizados para describir el movimiento de una partícula. La Figura 2.4 resume gráficamente el resultado de la ecuación 2.18.

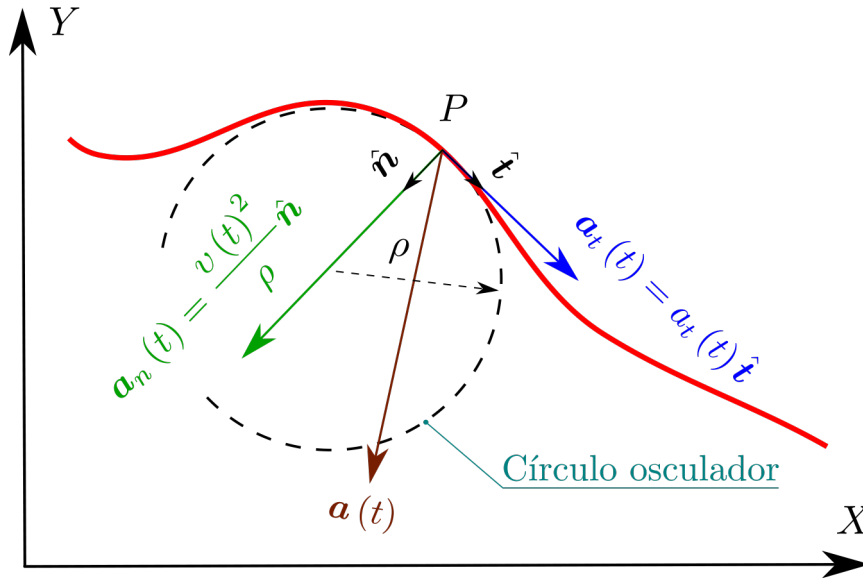


Figura 2.4: Componente tangencial y normal de la aceleración de la partícula P , se indica además el círculo osculador y el radio de curvatura ρ .

Un caso particular importante de la ecuación 2.18, corresponde al de una partícula que recorre una trayectoria circular con rapidez uniforme. Recordará de sus cursos previos de física que una partícula en dicho movimiento se encuentra sometida a la acción de una aceleración dirigida hacia el centro de la trayectoria circular. Esta aceleración recibe el nombre de aceleración centrípeta, y es consecuencia de que la velocidad de la partícula se encuentra constantemente cambiando, ya que, a pesar de que su magnitud permanece constante (rapidez) su dirección varía.

2.1. Sistemas de coordenadas

En la sección anterior vimos como obtener la velocidad y aceleración de una partícula a partir de su vector posición. Expresamos estas magnitudes en términos de los vectores tangente y normal unitarios, en otras palabras las expresamos en el sistema de coordenadas intrínseco. Existen distintos tipos de sistemas coordenados con los cuales podemos describir el movimiento de una partícula, y cada uno de ellos presenta sus ventajas dependiendo de la clase de problema que queramos resolver. El objetivo de esta sección será, por tanto,

expresar la posición, velocidad y aceleración de una partícula en estos distintos sistemas coordenados.

Como ejemplo introductorio consideremos el problema de describir el movimiento de un péndulo simple. En el péndulo simple, una masa (que asumiremos como un objeto puntual) se suspende por medio de una cuerda inextensible de masa despreciable. La masa oscila bajo la acción de la gravedad y como consecuencia de ello su movimiento corresponde a un arco de circunferencia. En cursos introductorios de física la posición, velocidad y aceleración de la partícula se expresaron comúnmente en el sistema cartesiano de coordenadas. Este sistema tiene la ventaja de su sencillez, consecuencia principalmente de que sus vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, no cambian con el tiempo¹. No obstante, no siempre resulta conveniente usar el sistema cartesiano y en el caso del péndulo simple esto último queda de manifiesto. La manera más sencilla y adecuada de describir el movimiento de la masa es usando el ángulo que adopta la cuerda con respecto a la vertical. Esta descripción equivale a utilizar el sistema polar de coordenadas.

El primer sistema coordenado que estudiaremos será el sistema coordenado polar, para posteriormente analizar el sistema coordenado cilíndrico, que básicamente constituye la extensión tridimensional del sistema polar, y finalmente el sistema de coordenadas esférico.

2.1.1. Coordenadas polares

En el sistema de coordenadas polares la ubicación de un punto en el plano queda definida por la distancia del mismo al origen de coordenadas, que denotamos por ρ , y el ángulo que adopta el vector posición con respecto al eje horizontal, el ángulo θ . Definimos también los vectores radial unitario, $\hat{\rho}$ y transversal unitario, $\hat{\theta}$, tal y como se indica en la Figura 2.5.

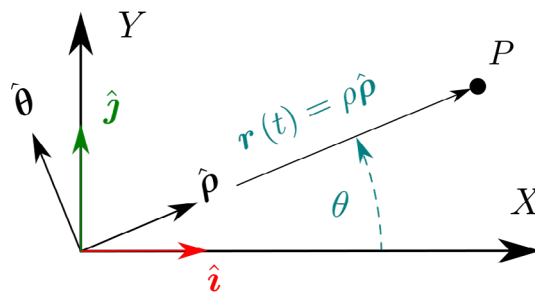


Figura 2.5: Posición de la partícula P en coordenadas polares, junto con los vectores unitarios.

1. Tanto su magnitud como su dirección permanecen siempre constantes.

El vector posición de la partícula se escribe en coordenadas polares como²

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.19)$$

La velocidad la obtenemos derivando con respecto al tiempo el vector posición, esto es

$$\mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{dt} \quad (2.20)$$

Para obtener la derivada del vector $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ con respecto al tiempo, establecemos primero las siguientes relaciones entre los vectores unitarios en coordenadas polares, y los vectores unitarios en coordenadas cartesianas

$$\left. \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} &= \hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

derivando ahora con respecto al tiempo las expresiones anteriores obtenemos³

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{dt} &= -\hat{\mathbf{i}} \dot{\theta} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} &= -\hat{\mathbf{i}} \dot{\theta} \cos \theta - \hat{\mathbf{j}} \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

comparando los resultados anteriores con la ecuación 2.21 podemos concluir

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{dt} &= \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} &= -\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

reemplazando en la ecuación 2.20

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.24)$$

2. Para reducir la extensión de las expresiones omitiremos la notación funcional. Así por ejemplo $\rho(t)$ se escribe simplemente como ρ .

3. Utilizaremos aquí las siguientes notaciones para expresar la derivada con respecto al tiempo: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Esta última expresión nos entrega el vector velocidad de la partícula en coordenadas polares. La componente $v_\rho = \dot{\rho}\hat{\rho}$ recibe el nombre de componente radial de la velocidad y la componente $v_\theta = \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$ se conoce como la componente transversal. Para obtener la aceleración en coordenadas polares derivamos con respecto al tiempo la ecuación 2.24

$$\mathbf{a} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{dt} + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} \quad (2.25)$$

luego de reemplazar las expresiones 2.22 en la ecuación anterior, y luego de simplificar obtenemos

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} \quad (2.26)$$

en la Figura 2.6 se describen de manera gráfica los resultados de las ecuaciones 2.24 y 2.26.

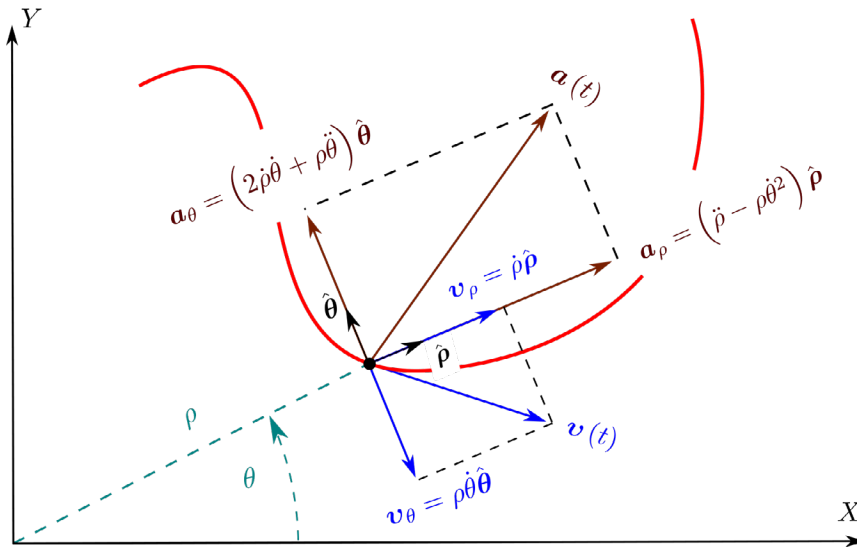


Figura 2.6: Velocidad y aceleración de una partícula en coordenadas polares, incluyendo sus componentes radiales y transversales correspondientes.

2.1.2. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se utilizan para determinar la posición de un punto en el espacio. Corresponden a la extensión tridimensional de las coordenadas polares. Como se indica en la Figura 2.7 la única diferencia radica en que en este caso incluimos la distancia vertical de la partícula al plano XY . Las expresiones para el vector posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en coordenadas cilíndricas son similares al caso en coordenadas polares, solo tenemos que incluir la componente vertical z , es decir

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

2.1.3. Coordenadas esféricas

Al igual que las coordenadas cilíndricas, las coordenadas esféricas se utilizan para determinar la posición de un punto en el espacio. Tal como se describe en la Figura 2.8 usamos como coordenadas la distancia de la partícula al origen, r , el ángulo que la proyección del vector posición con el plano XY forma con el eje X , θ , y el ángulo formado por dicha proyección y el vector posición, ϕ .

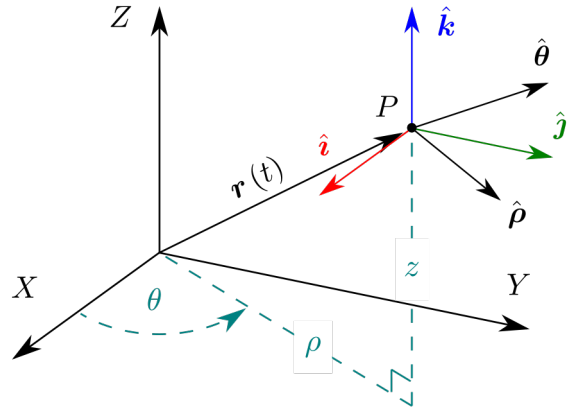


Figura 2.7: Ubicación en coordenadas cilíndricas de una partícula P en el espacio. Se indican además los vectores unitarios correspondientes.

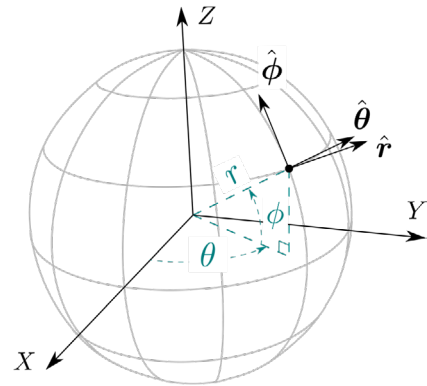


Figura 2.8: Ubicación en coordenadas esféricas de una partícula P en el espacio. Se indican además los vectores unitarios correspondientes.

4. Muy a menudo se usa el denominado ángulo cenital que corresponde al ángulo que forma el vector posición de la partícula con el eje Z .

El vector posición de la partícula queda definido en coordenadas esféricas como

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad (2.28)$$

por tanto, el vector velocidad es

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \quad (2.29)$$

la primera derivada se conoce como la velocidad radial, e indica la rapidez a la cual la partícula se aleja o acerca del origen del sistema de coordenadas. Para obtener la derivada del vector radial unitario, conviene primero que expresemos los vectores unitarios en coordenadas esféricas en términos de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas. De la Figura 2.9 podemos escribir

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \cos \phi \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \sin \phi \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin \phi \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \phi \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

derivando con respecto al tiempo la expresiones anteriores y luego de simplificar obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} &= \dot{\theta} \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} &= -\dot{\theta} \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \dot{\theta} \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{dt} &= -\dot{\phi} \hat{\mathbf{r}} - \dot{\theta} \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

reemplazando la expresión para la derivada del vector radial unitario en la ecuación 2.29, llegamos al siguiente resultado

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta} \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.32)$$

Finalmente para obtener la aceleración derivamos la velocidad con respecto al tiempo. Luego de reemplazar las expresiones para las derivadas de los vectores unitarios y sim-

plificar se obtiene (¡compruebe usted mismo estos resultados!)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} = & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi - r\dot{\phi}^2 \right) \hat{\mathbf{r}} \\
 & + \left(2\dot{r}\dot{\theta} \cos \phi + r\ddot{\theta} \cos \phi - 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 & + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi + r\ddot{\phi} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

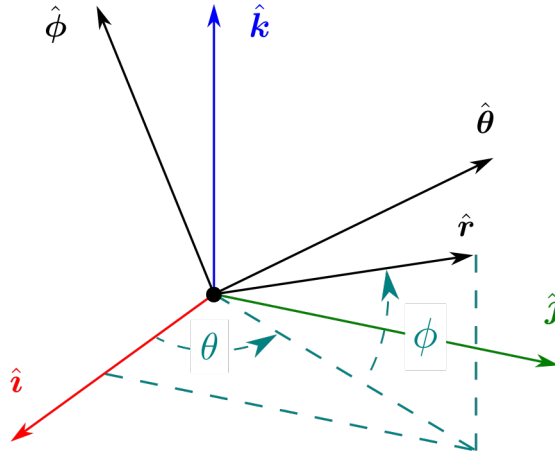


Figura 2.9: Vectores unitarios en coordenadas esféricas y vectores unitarios en coordenadas cartesianas.

2.2. Problemas capítulo 2

Problema 2.1

Como se muestra en la Figura 2.10, una pieza de artillería y un vehículo se encuentran sobre una pendiente inclinada a un ángulo α sobre la horizontal. La pieza de artillería es capaz de lanzar proyectiles con una rapidez inicial v_0 y mantiene su cañón inclinado en un ángulo θ fijo, como se indica en la Figura 2.10. En el instante inicial, ambos móviles se encuentran a una distancia d entre sí y comienzan a moverse uno hacia el otro con rapidez constante iguales a v_1 y v_2 . Si la pieza de artillería desea impactar el vehículo, demuestre que el disparo debe ser ejecutado en

$$\Delta t = \left(\frac{dg \cos^2 \alpha - 2v_0 \sin \theta (v_0 \cos (\theta + \alpha) + (v_1 + v_2) \cos \alpha)}{g (v_1 + v_2) \cos^2 \alpha} \right)$$

segundos después de que los móviles inician su movimiento. Muestre también que el impacto se producirá en el instante

$$t = \frac{1}{v_1 + v_2} \left(d - \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos (\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha} \right)$$

¿Qué restricciones debe satisfacer la rapidez inicial del proyectil para que se produzca el impacto en las condiciones descritas?

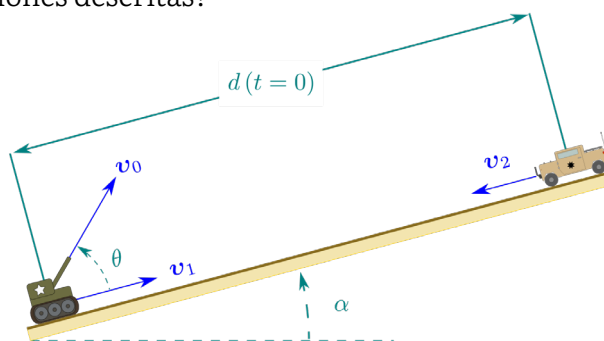


Figura 2.10: Problema 2.1.

Solución 2.1

Como se muestra en la Figura 2.11, escogemos nuestro sistema de referencia con el eje X paralelo a la pendiente y fijo en la posición en que la pieza de artillería inicia el movimiento.

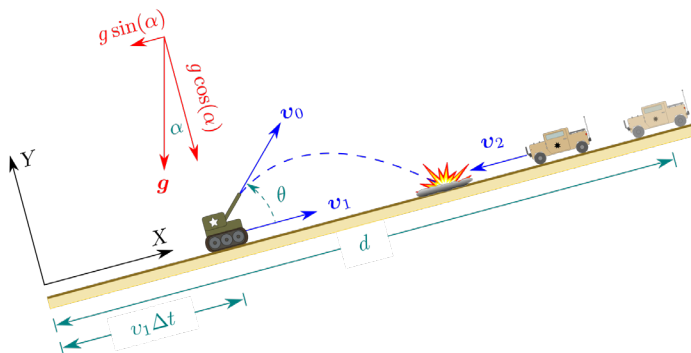


Figura 2.11: Sistema de referencia paralelo a la pendiente y fijo respecto a ella.

El vector posición del proyectil cuando $t > \Delta t$ se expresa como

$$\mathbf{r}_p(t) = \left\langle v_1 \Delta t + (v_0 \cos \theta + v_1)(t - \Delta t) - \frac{1}{2}g \sin \alpha (t - \Delta t)^2, \right. \\ \left. v_0 \sin \theta (t - \Delta t) - \frac{1}{2}g \cos \alpha (t - \Delta t)^2 \right\rangle$$

El tiempo de vuelo del proyectil es, en este caso, $t - \Delta t$, ya que el mismo se lanza luego de Δt segundos después de que los móviles inician su movimiento. El vector posición del vehículo es

$$\mathbf{r}_v(t) = \langle d - v_2 t, 0 \rangle$$

en el impacto debe cumplirse $\mathbf{r}_p(t) = \mathbf{r}_v(t)$, para la componente Y se tiene:

$$v_0 \sin \theta (t - \Delta t) - \frac{1}{2}g \cos \alpha (t - \Delta t)^2 = 0 \\ \Rightarrow t - \Delta t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g \cos \alpha} \quad (\text{P2.1-34})$$

en tanto para la componente X :

$$v_1 \Delta t + (v_0 \cos \theta + v_1)(t - \Delta t) - \frac{1}{2}g \sin \alpha (t - \Delta t)^2 = d - v_2 t$$

reemplazando la ecuación P2.1-34 y manipulando algebraicamente, obtenemos

$$\frac{2v_0^2 \sin \theta \cos (\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha} = d - (v_1 + v_2) t$$

resolviendo para el instante de tiempo del impacto

$$t = \frac{1}{v_1 + v_2} \left(d - \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos (\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha} \right)$$

Para determinar el intervalo de tiempo Δt usamos la ecuación P2.1-34

$$\Delta t = \frac{dg \cos^2 \alpha - 2v_0 \sin \theta (v_0 \cos (\theta + \alpha) + (v_1 + v_2) \cos \alpha)}{g \cos^2 \alpha (v_1 + v_2)}$$

Para que ocurra el impacto debe cumplirse que: $t \wedge \Delta t > 0$

$$t > 0:$$

$$d > \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos (\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

$$\therefore v_0 < \cos \alpha \sqrt{\frac{dg}{2 \sin \theta \cos (\theta + \alpha)}}$$

$$\Delta t > 0:$$

$$\therefore 2v_0^2 \sin \theta \cos (\theta + \alpha) + 2v_0 \sin \theta (v_1 + v_2) \cos \alpha - dg \cos^2 \alpha > 0$$

El valor mínimo de v_0 de las condiciones asegura el impacto del proyectil.

Otra alternativa

Escogemos el sistema de referencia solidario al tanque y $t = 0$ en el instante de disparo, como se muestra en la Figura 2.12. En este sistema de referencia el vehículo se aproxima con rapidez $v_1 + v_2$, entonces los vectores de posición son:

$$\mathbf{r}_p(t) = \left\langle v_0 \cos \theta t - \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2, \right. \\ \left. v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2 \right\rangle$$

$$\mathbf{r}_v(t) = \langle d - (v_1 + v_2) \Delta t - (v_1 + v_2) t, 0 \rangle$$

en el impacto $\mathbf{r}_p(t) = \mathbf{r}_v(t)$, y desde aquí se sigue de manera análoga.

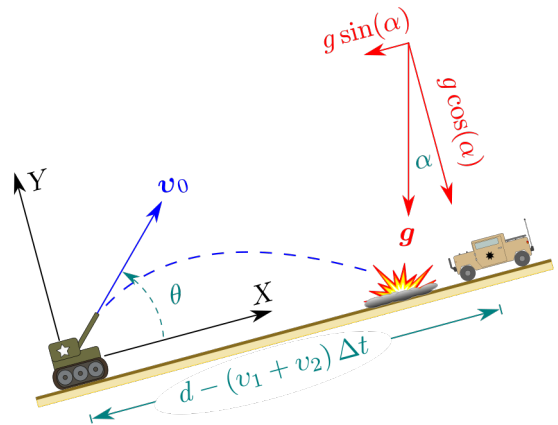


Figura 2.12: Otra alternativa para escoger el sistema de referencia.

Problema 2.2

Los puntos O y A corresponden a los extremos del diámetro de una circunferencia de radio $R = 80$ cm. En el punto A se traza la recta t tangente a la circunferencia. Por otra parte, la recta secante ON corta a la circunferencia en el punto M , tal y como se indica en la Figura 2.13. Un punto P se ubica sobre la secante ON de manera tal que se cumple que la distancia de P a O es la misma que la distancia de M a N , esto es $\overline{OP} = \overline{MN}$. Partiendo de A , el punto N se mueve a lo largo de la recta t con velocidad constante igual a $v_0 = 0,8$ m/s, haciendo que el punto P recorra la curva azul OPB de la Figura 2.13, curva conocida con el nombre de Cisoide.

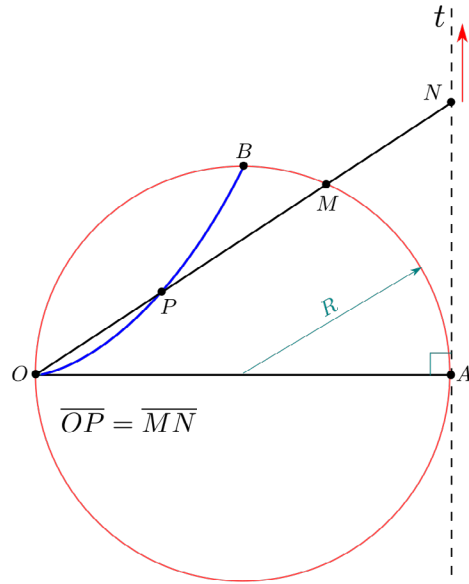


Figura 2.13: Problema 2.2.

- Determine la velocidad y aceleración de P cuando este pasa por la circunferencia en el punto B .
- ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria de P en B ?

Solución 2.2

De la Figura 2.14, tenemos que

$$\left. \begin{aligned} OM &= 2R \cos \theta \\ ON &= 2R \sec \theta \end{aligned} \right\}$$

$$OP = MN = ON - OM$$

$$\therefore OP = R(\sec \theta - \cos \theta)$$

si $\rho = OP$ (o sea usando coordenadas polares)

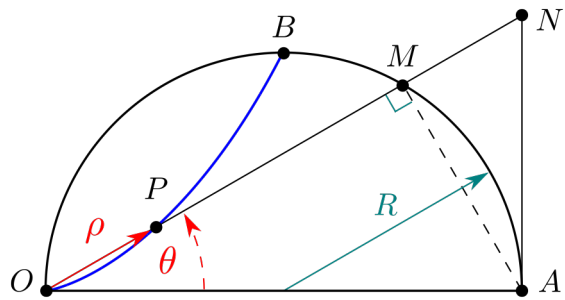


Figura 2.14: Determinación de las coordenadas polares de la trayectoria de P .

$$\rho = 2R \left(\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right)$$

$$\rho = 2R \tan \theta \sin \theta$$

sabemos también que $AN = v_0 t$

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &= \frac{v_0 t}{2R} \\ \sin \theta &= \frac{v_0 t}{\sqrt{4R^2 + v_0^2 t^2}} \end{aligned} \right\}$$

entonces:

$$\rho = \frac{v_0^2 t^2}{\sqrt{4R^2 + v_0^2 t^2}}$$

a) Cuando el punto P pasa por B , $\theta = \pi/4$

$$1 = \frac{v_0 t}{2R} \Rightarrow t = \frac{2R}{v_0} = 2 \text{ s}$$

para el vector velocidad de P , $\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\dot{\rho} = v_0^2 t \left(2 \left(4R^2 + v_0^2 t^2 \right)^{-1/2} - \left(4R^2 + v_0^2 t^2 \right)^{-3/2} \right)$$

$$\therefore v_\rho = \dot{\rho} = v_0^2 t \frac{8R^2 + v_0^2 t^2}{\left(4R^2 + v_0^2 t^2 \right)^{3/2}}$$

$$\therefore v_\rho = 0,849 \text{ m/s}$$

también tenemos que

$$\theta = \arctan \left(\frac{v_0 t}{2R} \right) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{2R v_0}{4R^2 + v_0^2 t^2}$$

$$\therefore v_\theta = \frac{2R v_0^3 t^2}{\left(4R^2 + v_0^2 t^2 \right)^{3/2}}$$

$$\therefore v_\theta = 0,283 \text{ m/s}$$

por lo tanto, el vector velocidad de P en el punto B es:

$$\mathbf{v}_B = 0,849 \text{ m/s} \hat{\rho} + 0,283 \text{ m/s} \hat{\theta}$$

para el vector aceleración, $\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \hat{\theta}$

$$\ddot{\rho} = \frac{(8R^2v_0^2 + 3v_0^4t^2)(4R^2 + v_0^2t^2) - 3v_0^2t(8R^2v_0^2t + v_0^4t^3)}{(4R^2 + v_0^2t^2)^{5/2}}$$

evaluando la ecuación anterior, tenemos

$$\ddot{\rho} = 0,071 \text{ m/s}^2$$

también tenemos que

$$\ddot{\theta} = -\frac{4Rv_0^3t}{(4R^2 + v_0^2t^2)^2} \Rightarrow \ddot{\theta} = -0,125 \text{ rad/s}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{\rho_B} = 0 \text{ m/s}^2 \\ a_{\theta_B} = 0,283 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\}$$

por lo tanto, el vector aceleración de P en el punto B es:

$$\mathbf{a}_B = 0,283 \text{ m/s}^2 \hat{\theta}$$

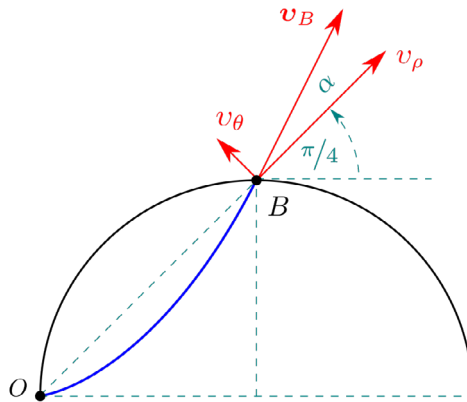


Figura 2.15: Descomposición del vector velocidad en coordenadas polares.

b) El vector velocidad define la dirección del vector tangente a la trayectoria, tal y como se ve en la Figura 2.15

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_\theta}{v_\rho}\right) = \arctan\left(\frac{0,283}{0,849}\right) = 0,322 \text{ rad } (18,435^\circ)$$

por lo tanto, el vector tangente unitario $\hat{t}$ forma un ángulo de $63,435^\circ$ con respecto al eje X (diámetro OA) en el punto B . El vector normal unitario $\hat{n}$ forma, por tanto, un ángulo de $153,435^\circ$ con respecto al eje X . Descompongamos la aceleración en B con respecto a la dirección de $\hat{n}$, es decir, obtengamos la aceleración normal a_n como se muestra en la Figura 2.16

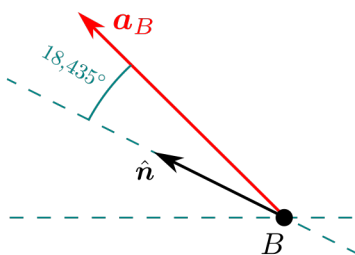


Figura 2.16: Vector aceleración y vector normal $\hat{n}$ en el punto B .

$$a_n = a_B \cos(18,435^\circ) = 0,268 \text{ m/s}^2$$

sabemos también que en coordenadas intrínsecas la componente normal del vector aceleración es

$$a_n = \frac{|\mathbf{v}_B|^2}{R_B} \hat{n}$$

donde, $|\mathbf{v}_B|$ es la rapidez en B y R_B es el radio de curvatura en el punto B

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_B| &= 0,895 \text{ m/s} \\ 0,268 \text{ m/s}^2 &= \frac{(0,895 \text{ m/s})^2}{R_B} \\ \therefore R_B &= 2,989 \text{ m} \end{aligned}$$

Problema 2.3

Una pequeña esfera se mueve con rapidez u constante sobre un riel circular de radio r colocado en posición horizontal. El riel circular se deja caer desde el reposo de manera tal que permanece siempre en posición horizontal.

- Determine la rapidez y aceleración de la esfera una vez que esta ejecuta un total de 3 vueltas en torno al riel.
- ¿En cuánto tiempo la rapidez de la esfera se duplicará con respecto de su valor inicial?

Solución 2.2

De acuerdo a la Figura 2.17 en coordenadas cilíndricas, y escogiendo el eje Z hacia abajo, el vector velocidad se expresa como

$$\mathbf{v} = v\hat{\theta} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

donde $\rho = r$ y $r\dot{\theta} = v$. El vector aceleración es:

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

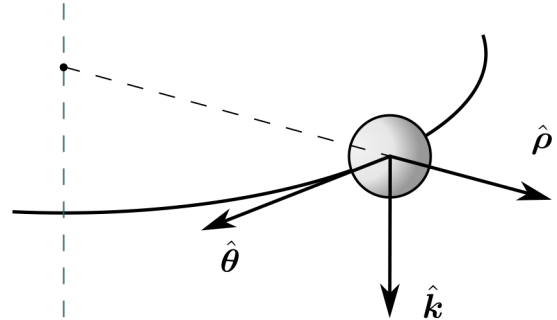


Figura 2.17: Vectores unitarios en coordenadas cilíndricas.

como la esfera y el riel caen libremente bajo la acción de la gravedad, tenemos que

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= g \\ \therefore \mathbf{a} &= -\frac{v^2}{r}\hat{\rho} + g\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

la componente vertical de la velocidad es:

$$v_z = gt\hat{\mathbf{k}}$$

finalmente tenemos

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v\hat{\boldsymbol{\theta}} + gt\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{a} &= -\frac{v^2}{r}\hat{\boldsymbol{\rho}} + g\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \right\}$$

a) Como $\theta = vt/r$:

$$6\pi = \frac{v}{r}t \Rightarrow t = \frac{6\pi r}{v}$$

por lo tanto, la rapidez de la partícula vale:

$$|\mathbf{v}| = \frac{1}{v} \sqrt{v^4 + 36\pi^2 r^2 g^2}$$

b) La rapidez de la partícula en el tiempo t es: $\sqrt{v^2 + g^2 t^2}$. Por tanto para la condición buscada se tiene:

Problema 2.4

La barra AB gira en torno a su eje longitudinal como se indica en la Figura 2.18. Unida a la barra existe un tubo inclinado, CD , de altura h , y por fuera del cual puede deslizarse un collarín. El collarín parte desde el reposo en el punto C y se mueve a lo largo del tubo CD con aceleración constante a .

a) Si la barra gira en torno a su eje longitudinal con velocidad angular constante ω determine la velocidad

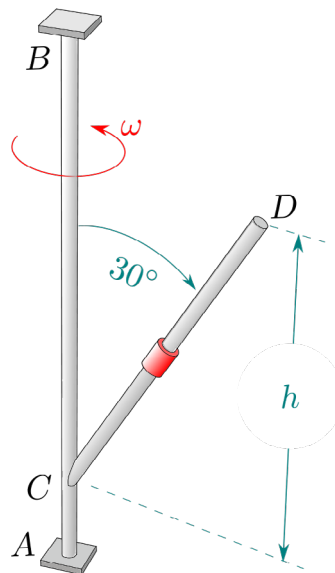


Figura 2.18: Problema 2.4.

del collarín en el momento que abandona la porción CD .

b) Suponga ahora que la barra gira en torno a su eje longitudinal de manera uniformemente acelerada con aceleración angular α , y justo en el momento en el que el collarín comienza a moverse dentro de la porción CD , su velocidad angular es igual a ω . Determine la velocidad del collarín en el momento que abandona la porción CD .

Solución 2.4

En coordenadas esféricas, $\phi = 60^\circ \Rightarrow \dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$. El movimiento del collarín a lo largo del tubo inclinado es

$$r = \frac{1}{2}at^2$$

a) Velocidad en coordenadas esféricas

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= at \Rightarrow \ddot{r} = a \\ \theta &= \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore \mathbf{v} = at\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{4}a\omega t^2\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Podemos notar que el collarín abandona el tubo inclinado cuando $r = h \csc 60^\circ = \frac{2}{3}\sqrt{3}h$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\sqrt{3}h &= \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}h}{3a}} \\ \therefore \mathbf{v} &= 2a\sqrt{\frac{\sqrt{3}h}{3a}}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\sqrt{3}}{3}h\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

b) En este caso

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \alpha t + \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = \alpha$$

por lo tanto, el vector velocidad queda

$$\mathbf{v} = at\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{4}at^2(\alpha t + \omega)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

nuevamente el collarín abandona el tubo inclinado en $t = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}h}{3a}}$

$$\therefore \mathbf{v} = 2a\sqrt{\frac{\sqrt{3}h}{3a}}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\sqrt{3}}{3}h\left(2\alpha\sqrt{\frac{\sqrt{3}h}{3a}} + \omega\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Problema 2.5

El punto N se mueve alrededor de una semicircunferencia con velocidad angular constante igual a ω , por otro lado el punto M se mueve a lo largo de la simetral del diámetro de la semicircunferencia con velocidad constante igual a v_1 . El punto P se mueve a lo largo de la línea $\overline{NM}$ con velocidad constante igual a v como se describe en la Figura 2.19. Si en $t=0$ los puntos N y P se ubican en A y el punto M en O , determine la trayectoria de P .

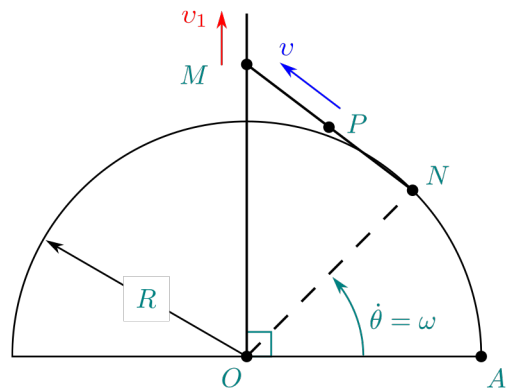


Figura 2.19: Problema 2.5.

Solución 2.5

Los vectores posición son $\mathbf{N} = \langle R \cos \omega t, R \sin \omega t \rangle$ y $\mathbf{M} = \langle 0, v_1 t \rangle$. La trayectoria de P queda definida por

$$\mathbf{P} = \mathbf{N} + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{N}}{|\mathbf{M} - \mathbf{N}|} v t$$

entonces

$$|\mathbf{M} - \mathbf{N}| = \sqrt{R^2 \cos^2 \omega t + R^2 \sin^2 \omega t - 2Rv_1 t \sin \omega t + v_1^2 t^2}$$

$$|\mathbf{M} - \mathbf{N}| = \sqrt{R^2 - 2Rv_1 t \sin \omega t + v_1^2 t^2}$$

por lo tanto, la trayectoria de P es

$$\mathbf{P} = \left\langle R \cos \omega t - \frac{R \cos \omega t v t}{\sqrt{R^2 - 2Rv_1 t \sin \omega t + v_1^2 t^2}}, \right. \\ \left. R \sin \omega t + \frac{(v_1 t - R \sin \omega t) v t}{\sqrt{R^2 - 2Rv_1 t \sin \omega t + v_1^2 t^2}} \right\rangle$$

Problema 2.6

La superficie de la Figura 2.20 se forma al hacer rotar sobre un eje vertical un cuarto de circunferencia de radio R . Sobre dicha superficie se apoya un cuerpo A que se une por medio de una cuerda inextensible, y que pasa por la cúspide de la superficie, a un segundo cuerpo B . Si el cuerpo A gira en torno al eje vertical de la superficie con velocidad angular constante ω , y el cuerpo

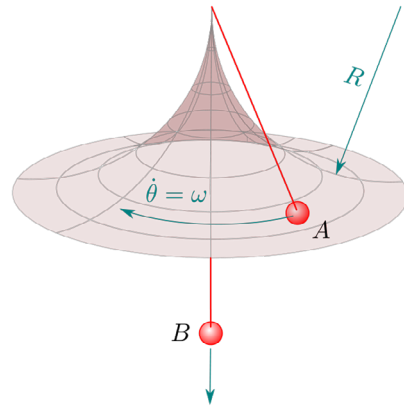


Figura 2.20: Problema 2.6.

B desciende verticalmente con aceleración constante igual a α , determine la velocidad y aceleración del cuerpo A .

Solución 2.6

En base a la Figura 2.21 en coordenadas cilíndricas, tenemos que $h+l = \text{constante}$
 $\Rightarrow \dot{h} = -\dot{l}$

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \dot{h} = at$$

$$\dot{l} = -at \Rightarrow l = l_0 - at$$

De la Figura 2.21 se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= l \sin \alpha \\ z &= l \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

sin embargo

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{l}{2R} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{2R} \sqrt{4R^2 - l^2} \end{aligned} \right\}$$

finalmente

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{l^2}{2R} \\ z &= \frac{l}{2R} \sqrt{4R^2 - l^2} \end{aligned} \right\}$$

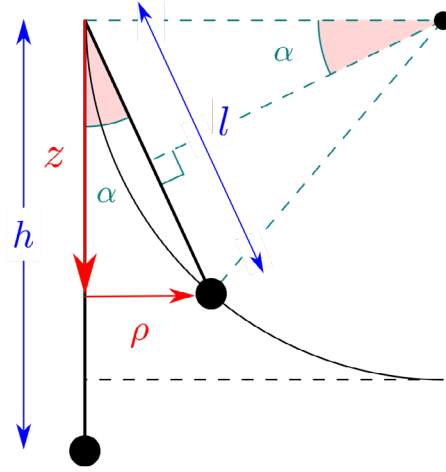


Figura 2.21: Geometría para el problema 2.6.

derivando con respecto al tiempo las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\dot{\rho} = \frac{l}{R} \dot{l}$$

$$\dot{z} = \frac{\dot{l}}{2R} \sqrt{4R^2 - l^2} - \frac{l^2 \dot{l}}{2R \sqrt{4R^2 - l^2}}$$

por lo tanto la velocidad del cuerpo A vale:

$$\mathbf{v} = \frac{-at}{R} (l_0 - at) \hat{\rho} + \frac{(l_0 - at)^2}{2R} \omega \hat{\theta} + \frac{at \left((l_0 - at)^2 - 2R^2 \right)}{R \sqrt{4R^2 - (l_0 - at)^2}} \hat{\mathbf{k}}$$

Determinemos la segunda derivada con respecto al tiempo para ρ y z .

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} &= \frac{1}{R} \dot{l}^2 + \frac{1}{R} l \ddot{l} \\ \ddot{z} &= \frac{2R^2 (\dot{l} \ddot{l} - 4l \dot{l}^2 - 2l^2 \ddot{l}) + l^3 (\dot{l}^2 + l \ddot{l})}{R (4R^2 - l^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\}$$

por lo tanto la aceleración del cuerpo A es

$$\mathbf{a} = \frac{2}{R} l \dot{l} \omega \hat{\theta} + \left[\left(\frac{1}{R} \dot{l}^2 + \frac{1}{R} l \ddot{l} \right) - \frac{l^2 \omega^2}{2R} \right] \hat{\rho} + \frac{2R^2 (\dot{l} \ddot{l} - 4l \dot{l}^2 - 2l^2 \ddot{l}) + l^3 (\dot{l}^2 + l \ddot{l})}{R (4R^2 - l^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

Problema 2.7

En la Figura 2.22 el punto A se mueve a lo largo de la línea punteada ubicada a una distancia d del punto O . El punto P se ubica en la recta OA de manera tal que su distancia al punto A es siempre constante e igual a k . La curva descrita por el punto P se conoce con el nombre de Concoide de Nicomedes.

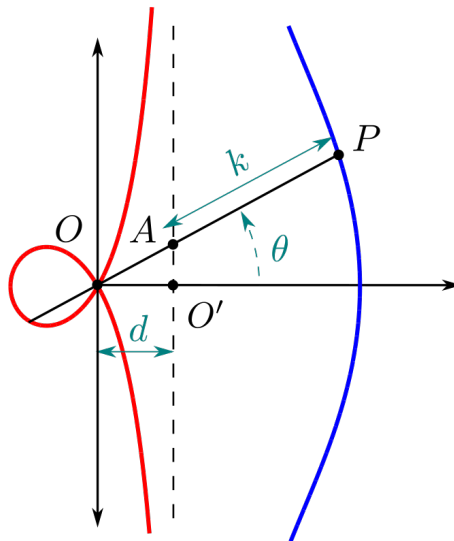


Figura 2.22: Problema 2.7.

a) Si la velocidad de A es constante e igual a $v_0 = 0,8 \text{ m/s}$, $d = 120 \text{ cm}$ y $k = 180 \text{ cm}$, determine la velocidad y aceleración de P cuando la recta OP forma un ángulo de 45° con respecto a la horizontal.

b) ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria de P en la ubicación anterior?

Solución 2.7

La posición del punto P queda descrita como:

$$\rho = \frac{d}{\cos \theta} + k$$

a) Sabemos que $\tan \theta = O'A/d \Rightarrow \tan \theta = v_0 t/d$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{v_0 t}{d}\right) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0 d}{d^2 + v_0^2 t^2} \\ \dot{\rho} &= d\dot{\theta} \sec \theta \tan \theta \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{v_0^2 t}{\sqrt{d^2 + v_0^2 t^2}} \end{aligned} \right\}$$

por lo tanto, la velocidad de P es:

$$\mathbf{v} = \frac{v_0^2 t}{\sqrt{d^2 + v_0^2 t^2}} \hat{\rho} + \frac{v_0 d (d \sec \theta + k)}{d^2 + v_0^2 t^2} \hat{\theta}$$

cuando $\theta = 45^\circ \Rightarrow t = d/v_0$

$$\therefore \mathbf{v} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \hat{\rho} + \frac{v_0}{2d} (d\sqrt{2} + k) \hat{\theta}$$

evaluando numéricamente

$$\therefore \mathbf{v} = 0,5657 \text{ m/s} \hat{\rho} + 1,1657 \text{ m/s} \hat{\theta}$$

$$|\mathbf{v}| = 1,2957 \text{ m/s}$$

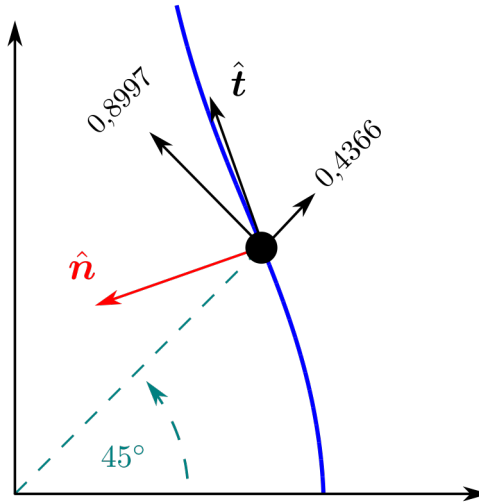


Figura 2.23: Vectores tangente unitario y normal unitario, se indican las componentes de $\mathbf{t}$ en coordenadas polares.

el vector tangente unitario en coordenadas polares se determina como: $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{v} / |\mathbf{v}| \Rightarrow$

$$\hat{\mathbf{t}} = 0,4366 \hat{\rho} + 0,8997 \hat{\theta}$$

si escribimos el vector normal unitario como: $\hat{\mathbf{n}} = n_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + n_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$, y teniendo en cuenta que: $\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} 0,4366n_\rho + 0,8997n_\theta &= 0 \\ \Rightarrow -2,0607n_\theta &= n_\rho \end{aligned}$$

como sabemos también que se cumple que: $|\hat{\mathbf{n}}| = 1 \Rightarrow n_\rho^2 + n_\theta^2 = 1$, $\therefore$

$$4,2464n_\theta^2 + n_\theta^2 = 1$$

con esto obtenemos que $n_\theta = 0,4366$ y $n_\rho = -0,8997$

$$\therefore \hat{\mathbf{n}} = -0,8997\hat{\boldsymbol{\rho}} + 0,4366\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Ahora determinemos el vector aceleración del punto P

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{-2v_0^3 dt}{(d^2 + v_0^2 t^2)^2} \\ \ddot{\rho} &= \frac{v_0^2 d^2}{(d^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\}$$

Evaluando numéricamente se obtiene:

$$\mathbf{a} = -0,2 \text{ m/s}^2 \hat{\boldsymbol{\rho}} - 0,4 \text{ m/s}^2 \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

b) Proyectemos ahora el vector $\mathbf{a}$ sobre $\hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0,0053$, por tanto la componente normal del vector aceleración es $\mathbf{a}_n = 0,0053 \hat{\mathbf{n}}$. El radio de curvatura puede ser calculado como:

$$R = \frac{(1,2957)^2}{0,0053} = 316,762 \text{ m}$$

Problema 2.8

Como se indica en la Figura 2.24 el punto P se mueve de tal forma que siempre se encuentra sobre la línea que une los puntos A y N . El punto A permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas, y el punto N se mueve sobre una trayectoria semicircular de radio $R = 5,5\text{m}$ y con velocidad angular constante $\dot{\phi} = 0,5\text{rad/s}$. Se sabe además que el movimiento de P a lo largo de la línea AN es uniformemente acelerado con velocidad inicial $v_0 = 0,5\text{m/s}$ y aceleración $a = 1,2\text{m/s}^2$

- Determinar los vectores aceleración y velocidad del punto P .
- Encontrar el radio de curvatura de la trayectoria descrita por el punto P cuando N pasa por B .

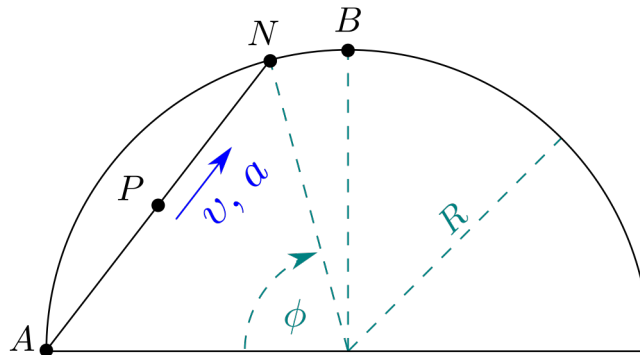


Figura 2.24: Problema 2.8.

Solución 2.8

- En base a la Figura 2.24 si usamos coordenadas polares con origen en el punto A , tenemos que

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{\dot{\phi}}{2} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

Por otro lado

$$\rho = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow \dot{\rho} = at + v_0 \Rightarrow \ddot{\rho} = a$$

entonces la velocidad y aceleración en coordenadas polares es

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= (at + v_0) \hat{\rho} - \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{2}at^2 + v_0t \right) \hat{\theta} \\ \mathbf{a} &= a - \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{1}{2}at^2 + v_0t \right) \hat{\rho} - \omega (at + v_0) \hat{\theta} \end{aligned} \right\}$$

b) Cuando N pasa por B , $\phi = \pi/2 = \omega t \Rightarrow t = \pi/2\omega$ ($t = 3,142$ s). Por lo tanto, la velocidad es

$$\mathbf{v} = 4,27 \text{ m/s} \hat{\rho} - 1,873 \text{ m/s} \hat{\theta}$$

por tanto la rapidez vale:

$$|\mathbf{v}| = 4,663 \text{ m/s}$$

además sabemos que el vector tangente unitario es

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

ahora reemplazando tenemos

$$\hat{\mathbf{t}} = 0,915 \hat{\rho} - 0,402 \hat{\theta}$$

sea $\hat{\mathbf{n}} = n_\rho \hat{\rho} + n_\theta \hat{\theta}$, como $\hat{\mathbf{t}}$ es perpendicular con $\hat{\mathbf{n}}$, entonces se cumple que $\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, con esto obtenemos

$$\left. \begin{aligned} 0,915n_\rho - 0,402n_\theta &= 0 \\ n_\rho &= 0,439n_\theta \end{aligned} \right\}$$

además $n_\rho^2 + n_\theta^2 = 1$, por lo tanto

$$0,193n_\theta^2 + n_\theta^2 = 1$$

y reemplazando tenemos que

$$\left. \begin{aligned} n_\theta &= -0,915 \\ n_\rho &= -0,402 \end{aligned} \right\}$$

ahora evaluando numéricamente la aceleración tenemos

$$\mathbf{a} = 0,732 \text{ m/s}^2 \hat{\rho} - 2,135 \text{ m/s}^2 \hat{\theta}$$

y la componente normal de la aceleración es $a_n = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, por lo tanto

$$a_n = 1,661 \text{ m/s}^2$$

pero sabemos que $a_n = v^2/R$, finalmente el radio de curvatura es

$$R = 13,088 \text{ m}$$

Problema 2.9

Como se indica en la Figura 2.25 una partícula P se mueve a lo largo de un alambre con forma de un cuarto circunferencia de radio R con velocidad angular constante ω_2 . Al mismo tiempo el alambre se hace girar en torno a un eje vertical con velocidad angular constante ω_1 .

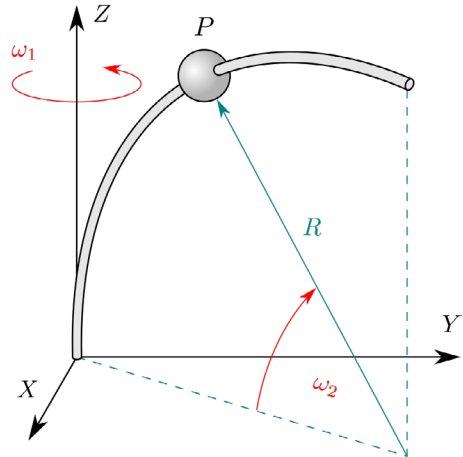


Figura 2.25: Problema 2.9.

a) Determinar el vector velocidad de la partícula P .

a) Asuma que el sistema se encuentra bajo la presencia de la aceleración de gravedad. Demuestre que luego de abandonar el alambre la partícula impacta la superficie (plano XY) a una distancia

$$D = R \sqrt{1 + \frac{2R}{g} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_2 \sqrt{\frac{2R}{g}}}$$

del origen.

Solución 2.9

a) El vector velocidad en coordenadas cilíndricas es

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{z} \hat{\mathbf{k}}$$

es inmediato ver que $\dot{\theta} = \omega_1$, de la Figura 2.26 vemos que

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= \frac{z}{R} \\ \cos \psi &= \frac{R - \rho}{R} \end{aligned} \right\}$$

por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} z &= R \sin \psi \\ \dot{z} &= R \dot{\psi} \cos \psi = R \omega_2 \cos \psi \end{aligned} \right\}$$

y también

$$\rho = R - R \cos \psi \Rightarrow \dot{\rho} = R \dot{\psi} \sin \psi = R \omega_2 \sin \psi$$

entonces el vector velocidad es

$$\mathbf{v} = R \omega_2 \sin \psi \hat{\boldsymbol{\rho}} + R (1 - \cos \psi) \omega_1 \hat{\boldsymbol{\theta}} + R \omega_2 \cos \psi \hat{\mathbf{k}}$$

donde $\psi = \omega_2 t$, pero cuando la partícula sale por el tubo $\psi = \pi/2$, entonces la velocidad es

$$\mathbf{v} = R\omega_2 \hat{\rho} + R\omega_1 \hat{\theta}$$

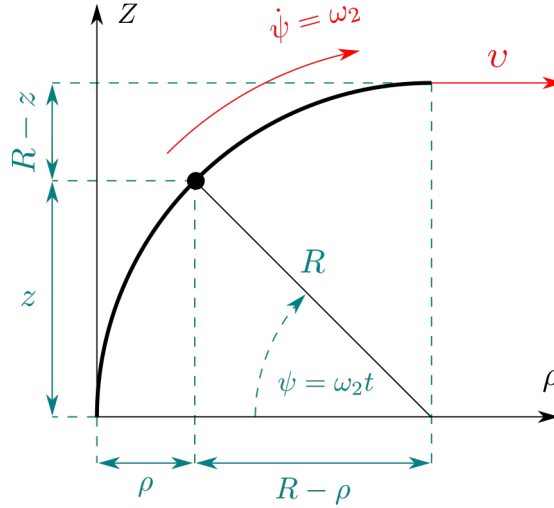


Figura 2.26: Problema 2.9.

b) Para determinar la distancia horizontal que alcanza la partícula cuando sale por el tubo necesitamos su rapidez de salida:

$$v = |\mathbf{v}| = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

la distancia horizontal que alcanza es

$$d = v\sqrt{\frac{2R}{g}} \Rightarrow d = R\sqrt{\frac{2R}{g}} (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

ahora para encontrar la distancia D desde el origen nos basamos en la Figura 2.27

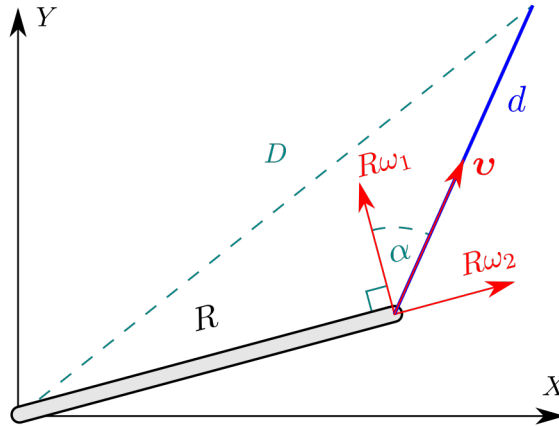


Figura 2.27: Determinación del alcance de la partícula.

de donde obtenemos que

$$\tan \alpha = \frac{R\omega_2}{R\omega_1} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

y usando teorema del coseno obtenemos

$$D^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

vemos que $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$, y a su vez, $\sin \alpha = \omega_2/\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, por lo tanto nos queda

$$D^2 = R^2 + d^2 + 2Rd \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

y finalmente, la distancia desde el origen del sistema de coordenadas es

$$D = R \sqrt{1 + \frac{2R}{g} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_2 \sqrt{\frac{2R}{g}}}$$

CAPÍTULO 3

Dinámica de la partícula

El primer intento conocido para explicar el movimiento de los cuerpos fue planteado por Aristóteles alrededor del 350 a.C. Este indicaba que un cuerpo solo podía mantenerse en movimiento si sobre él actúa una fuerza, afirmando en otras palabras que el estado natural de un cuerpo es el reposo. Esta idea fue aceptada por más de un milenio hasta que Galileo Galilei dedujo por medio de experimentos que un cuerpo en movimiento permanecería en movimiento a menos que una fuerza (como la fricción) hiciera que se detuviese. Esta última ley conocida como la ley de la inercia corresponde básicamente a la primera ley de Newton. Galileo también dedujo que ante la ausencia de resistencia aerodinámica objetos de distinta masa caerían con la misma aceleración. Más de tres siglos después, en el año 1971 durante la misión Apolo 15, el astronauta estadounidense David Scott realizó una versión del experimento de Galileo dejando caer en la Luna de forma simultánea un martillo y una pluma. Debido a la insignificante atmósfera Lunar, y la consecuente ausencia de resistencia aerodinámica, ambos objetos impactaron el suelo Lunar al mismo tiempo probando la veracidad de las ideas de Galileo.

En la misma época de Galileo, el astrónomo alemán Johannes Kepler, basándose en el modelo heliocéntrico de Copérnico y usando los datos observacionales tomados por el astrónomo danés Tycho Brahe, establece las leyes del movimiento planetario. La primera de estas leyes plantea que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos, en tanto que la segunda indica que la línea imaginaria que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales. Estas dos leyes fueron publicadas en el año 1609 en su obra *Astronomia nova*. La tercera ley, publicada una década más tarde, establece una relación entre el periodo de traslación del planeta y su distancia media al Sol. Usamos estas leyes hoy en día, no solo para describir el movimiento de los planetas, sino que también para determinar las órbitas de los satélites y estaciones espaciales.

Sin embargo, no fue hasta mediados del siglo XVII que Isaac Newton en su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural) sintetizó y dio el fundamento teórico a las ideas que hasta entonces científicos como Galileo, Kepler, Descartes y otros habían propuesto. En esta obra quedan definidas las tres leyes del movimiento de Newton que permiten definir de manera cuantitativa el movimiento de los

cuerpos. Los aportes de Newton a la ciencia no solo se limitan a la mecánica, sino que realizó también innumerables aportes en las matemáticas, desarrolló el cálculo diferencial e integral, creó el cálculo variacional, descubrió el teorema binomial, introdujo las coordenadas polares, en óptica demostró que la luz blanca es una mezcla de colores, explicó el arco iris, construyó el primer telescopio de reflexión, y demostró que la fuerza que hace que una manzana caiga es la misma que se encarga de mantener a los planetas en órbita en torno al Sol.

3.1. Leyes de movimiento de Newton

Primera ley: Si la fuerza neta que actúa sobre una partícula es cero, entonces esta se mueve con velocidad constante.

Esta ley, conocida también como la ley de inercia, puede parecer sencilla, sin embargo, oculta algunas *sutilezas*. La más importante de ellas es que define lo que se conoce como sistema de referencia inercial. Decimos que un sistema de referencia es inercial si en él se cumple la primera ley. Supongamos que estamos sentados frente a una mesa sin fricción sobre la cual descansa una taza. Decidimos usar como sistema de referencia para describir el movimiento de la taza un sistema fijo con respecto a la mesa. Además, sabemos que sobre la taza la fuerza neta que actúa es cero. Nada empuja o tira de la taza horizontalmente y en la dirección vertical la fuerza de gravedad es equilibrada por la reacción de la mesa hacia la taza. La taza se encuentra quieta en relación a nuestra ubicación y como sobre la misma no actúa fuerza alguna concluimos que se cumple la primera ley. El sistema de referencia que usamos para describir el movimiento de la taza es, por tanto, un sistema de referencia inercial.

La situación anterior no cambia si ahora suponemos que estamos sentados en un tren que se mueve con rapidez constante y en línea recta. Desde nuestra ubicación la taza seguirá pareciendo quieta, a su vez, la fuerza neta sobre la taza nuevamente es cero y por tanto el sistema de referencia fijo ahora a la mesa que se mueve sobre el tren, será también un sistema de referencia inercial. No obstante, la situación cambia si ahora el tren comienza a acelerar. Efectivamente imaginemos que el tren comienza a acelerar hacia adelante. Como la mesa posee fricción despreciable percibiremos ahora desde nuestro punto de vista que la taza comienza a desplazarse hacia atrás. La fuerza neta sobre la taza sigue siendo cero, pero sin embargo, la misma experimenta un cambio de velocidad. El sistema de refe-

rencia que se encuentra fijo a la mesa, que ahora acelera junto con el tren, ya no es un sistema de referencia inercial.

En los problemas que tengamos que resolver siempre usaremos sistemas de referencia inerciales para plantear las ecuaciones de movimiento. Esto significa que escogeremos un sistema en el cual podamos asegurar que se cumple la primera ley, lo que en la práctica implica utilizar un sistema de referencia que no se encuentre acelerando o girando. Si bien es cierto, es posible describir el movimiento de un cuerpo desde un sistema de referencia no inercial, el planteamiento resulta ser, en general, mucho más complejo.

Segunda ley: Si la fuerza neta que actúa sobre una partícula es distinta de cero, entonces dicha fuerza es proporcional a la aceleración de la partícula.

Expresada en términos matemáticos la segunda ley se escribe como sigue

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3.1)$$

en donde m corresponde a la masa del objeto, $\sum \mathbf{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre el objeto y $\mathbf{a}$ su aceleración. Analizando el enunciado de la segunda ley podemos concluir que la primera ley es en realidad un caso particular de la segunda ley. En efecto, si sobre la partícula la fuerza neta es cero, entonces de la ecuación 3.1 concluimos que la aceleración también lo es, lo que equivale a decir que la velocidad es constante. Vale la pena hacer hincapié en que la segunda ley corresponde a una ecuación de carácter vectorial, por lo que puede ser escrita en cualquier sistema coordenado que consideremos adecuado. Probablemente la versión más común para la segunda ley es aquella que se escribe en coordenadas cartesianas, y que sin duda ha utilizado en sus cursos previos de física, sin embargo, en muchas situaciones resulta más sencillo usar otros sistemas de coordenadas. Así por ejemplo, la segunda ley de Newton escrita en coordenadas cilíndricas queda como sigue

$$\left. \begin{aligned} F_\rho &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ F_\theta &= m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \\ F_z &= m\ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

También es importante mencionar que la segunda ley es una de las formas posibles para llegar a las ecuaciones de movimiento de una partícula. Estas ecuaciones de movimiento corresponden a ecuaciones diferenciales de segundo orden, debido a que la aceleración de la partícula es de hecho, la segunda derivada de su posición. La mayoría de estas ecuaciones diferenciales no poseen solución exacta y deben resolverse de forma numérica. Sin embargo, en casos como el oscilador de un grado de libertad que estudiaremos más adelante, podemos obtener una solución exacta o cerrada para dichas ecuaciones.

La segunda ley puede ser reescrita en términos del momento lineal de la partícula, que se define como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Si la masa permanece constante entonces podemos escribir

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad (3.3)$$

En mecánica clásica tanto la ecuación 3.1 como la ecuación 3.3 son equivalentes, sin embargo, en relatividad general solo la ecuación 3.3 es válida.

Tercera ley: Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza sobre A de igual magnitud y dirección pero de sentido opuesto.

La tercera ley, comúnmente conocida como la ley de acción y reacción, involucra a diferencia de las dos primeras leyes a dos cuerpos en vez de uno solo. También puede ser considerada como completamente original, ya que las dos primeras leyes habían sido enunciadas en distintas formas por científicos como Galileo, Hooke y Huygens.

Esta ley es a simple vista una ley de apariencia intuitiva, debido a que resulta fácil reconocer su validez cuando pensamos por ejemplo en lo que sucede al empujar un muro, en donde la fuerza que ejercemos sobre el muro es compensada por una fuerza ejercida desde el muro hacia nosotros, en concordancia con lo que establece la tercera ley. Menos clara es su validez si pensamos en una manzana cayendo hacia la superficie terrestre. La fuerza que la Tierra ejerce sobre la manzana es exactamente igual pero de sentido opuesto a la fuerza que la manzana ejerce sobre la Tierra. La aceleración de la manzana es evidente, no así lo que ocurre con la Tierra. Esto último se explica si tenemos en cuenta la segunda ley y la inmensa masa de la Tierra ($5,972 \times 10^{24}$ kg), desde donde resulta claro que la aceleración de la Tierra es, en consecuencia, insignificante.

3.2. Momento angular

Definimos el momento angular de una partícula como el producto vectorial o producto cruz de su vector posición por su momento lineal, esto es

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (3.4)$$

En la Figura 3.1 se describe gráficamente la definición del momento angular. El momento angular es un vector perpendicular al plano que forman el vector posición y el momento lineal, y cuya dirección queda definida por la regla de la mano derecha. Para determinar la magnitud del momento angular podemos utilizar el hecho de que la magnitud del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo formado por ellos, lo anterior implica que

$$H_O = mrv \sin \alpha \quad (3.5)$$

Dado que la partícula se mueve a través del espacio su momento angular es una magnitud que depende del tiempo. Para saber como varía el momento angular derivamos con respecto al tiempo la ecuación 3.4, de donde obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} \quad (3.6)$$

como el producto cruz de dos vectores colineales es cero, el primer término del lado derecho de la ecuación anterior se anula. Además, en virtud de la segunda ley de Newton, sabemos que $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, por lo tanto, podemos escribir

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F} \quad (3.7)$$

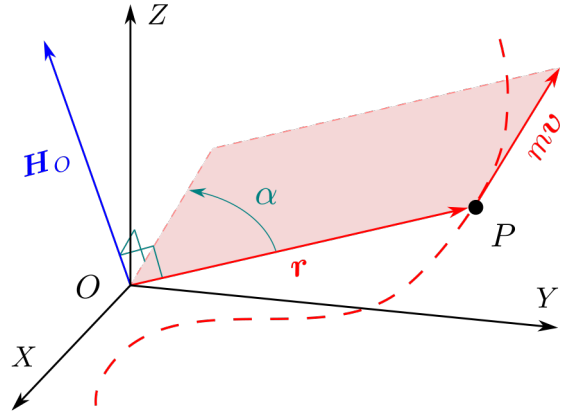


Figura 3.1: La partícula P viaja a través del espacio recorriendo la trayectoria indicada en rojo. A medida que la partícula se mueve, su momento angular queda definido como el producto cruz de su vector posición y de su momento lineal. El momento angular $\mathbf{H}_O$ es un vector perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$.

en la ecuación anterior, el producto $\mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}$ corresponde al momento que la fuerza neta sobre la partícula ejerce sobre el punto O . Por tanto, llegamos al siguiente resultado

$$\dot{H}_O = \sum M_O \quad (3.8)$$

La ecuación anterior establece que la variación del momento angular es igual al momento neto sobre el punto O . Si el momento neto es cero entonces la variación del momento angular es nula, lo que significa que el momento angular se conserva. Utilizaremos más adelante este último resultado para analizar el movimiento de una partícula sujeta a una fuerza central. Pero antes volvamos con la ecuación 3.4 y analicemos lo que ocurre cuando la partícula ejecuta un movimiento en el plano. Como se indica en la Figura 3.2 nos conviene en este caso expresar la posición y el momento lineal en coordenadas polares, de esta forma obtenemos

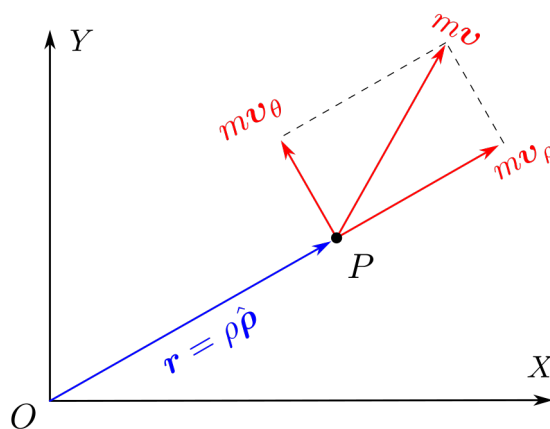


Figura 3.2: Componentes del momento lineal en coordenadas polares junto con el vector posición de la partícula.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\rho + \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\theta \quad (3.9)$$

como tanto el vector posición como la velocidad radial son colineales, la expresión anterior se reduce a

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\theta \quad (3.10)$$

la velocidad transversal de la partícula y el vector posición son perpendiculares entre sí, por tanto, tenemos que la magnitud del momento angular es

$$H_O = m\rho^2\dot{\theta} \quad (3.11)$$

derivando la ecuación 3.11 y usando el resultado de la ecuación 3.8 podemos concluir

$$\sum M_O = I_O \ddot{\theta} \quad (3.12)$$

en donde $I_O = m\rho^2$ es el momento de inercia de la partícula con respecto al punto O . La ecuación 3.12 se conoce comúnmente como la segunda ley de Newton para dinámica rotacional de la partícula.

3.3. Fuerzas centrales y leyes de Kepler

Un caso particular importante y de gran interés constituye el movimiento de una partícula sujeta a la acción de una fuerza central. Por fuerza central entendemos a toda fuerza cuya línea de acción siempre pasa por un punto fijo. Así, por ejemplo, una masa puntual que en ausencia de la gravedad se encuentra unida a un resorte cuyo extremo opuesto está fijo, se encuentra sometida a la acción de una fuerza central. Estudiaremos en esta sección el movimiento de una partícula sujeta a la acción de una fuerza central, para después estudiar el importante caso del movimiento planetario.

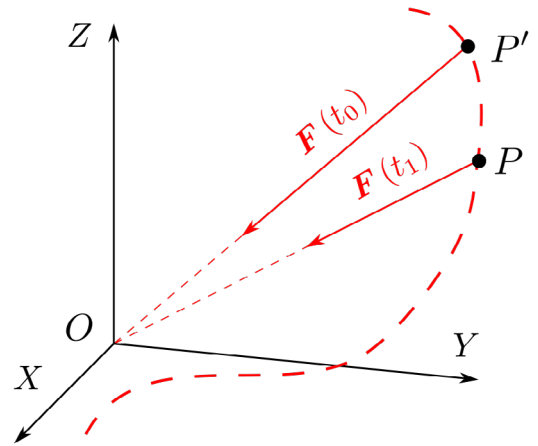


Figura 3.3: Fuerzas centrales ejercidas sobre una partícula en dos instantes de tiempo. Notar que las líneas de acción de las fuerzas se intersecan en el origen O .

Como se puede apreciar en la Figura 3.3, el momento que ejerce la fuerza con respecto al punto O es cero. Debido a lo anterior, el momento angular de la partícula con respecto al punto O es constante, lo que implica que tanto su magnitud como dirección no cambian. Como el momento angular es un vector perpendicular al plano que forman el vector posición y el momento lineal de la partícula, el hecho de que su dirección permanezca constante conlleva necesariamente que el movimiento de la partícula debe estar contenido en

un plano. Podemos concluir que el movimiento de una partícula sujeta a la acción de una fuerza central siempre es un movimiento plano. En astronomía, este último resultado se ve reflejado en las órbitas de los planetas en torno al Sol. Es así como nuestro planeta orbita en torno al Sol en el denominado plano de la eclíptica. Los restantes planetas también exhiben órbitas planas muy cercanas a las de la eclíptica. La orientación de los planos orbitales de los distintos planetas dependen de las condiciones iniciales que se produjeron en la formación de nuestro sistema solar a partir de una nube de gas y polvo en rotación. Dado que estas condiciones iniciales no fueron iguales para todos los planetas, los respectivos planos orbitales presentan ligeras inclinaciones respecto del plano de la eclíptica. Asimismo, la interacción gravitacional entre los planetas, que si bien es muy pequeña en comparación con la atracción del Sol, también produce sobre largos periodos de tiempo perturbaciones en los planos orbitales. De todos los planetas de nuestro sistema solar, Mercurio es el que posee el plano orbital con mayor desviación respecto de la eclíptica que, sin embargo, alcanza solo los 7° aproximadamente.

Si usamos un sistema coordenado cuyo origen coincide con la ubicación del Sol, y describimos la posición del planeta en coordenadas polares, entonces de acuerdo con la ecuación 3.11, el momento angular del planeta se determina como

$$H_O = m\rho^2\dot{\theta} \quad (3.13)$$

como sobre el planeta actúa una fuerza dirigida hacia el Sol, es decir una fuerza central, entonces esta última cantidad es constante. Dividiendo ambos lados por la masa obtenemos

$$\rho^2\dot{\theta} = h \quad (3.14)$$

en donde h es constante y corresponde al momento angular por unidad de masa. Veamos como esta última cantidad se relaciona con el área barrida por el radio vector de un planeta. En coordenadas polares podemos expresar el elemento de área, dA , como un triángulo cuya base es $\rho d\theta$ y cuya altura es igual a ρ , esto es

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta \quad (3.15)$$

o de forma equivalente

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}\rho^2 \quad (3.16)$$

usando la regla de la cadena podemos expresar la variación del área barrida por el radio vector (vector posición) del planeta como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.17)$$

combinado la ecuación 3.17 con la ecuación 3.16 obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{h}{2} \quad (3.17)$$

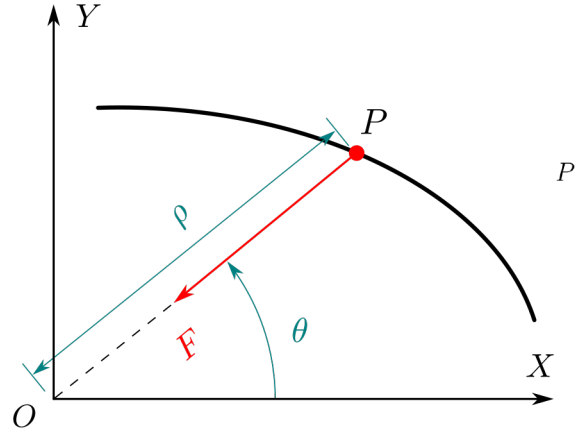


Figura 3.4: Fuerza central ejercida sobre un planeta descrita en coordenadas polares.

El lado derecho de la ecuación anterior corresponde precisamente a la mitad del momento angular por unidad de masa. Como esta última cantidad es constante podemos concluir que la tasa de variación con respecto al tiempo del área barrida por el radio vector del planeta no cambia con el tiempo. Este resultado se puede expresar como sigue

Segunda ley de Kepler: El radio vector de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

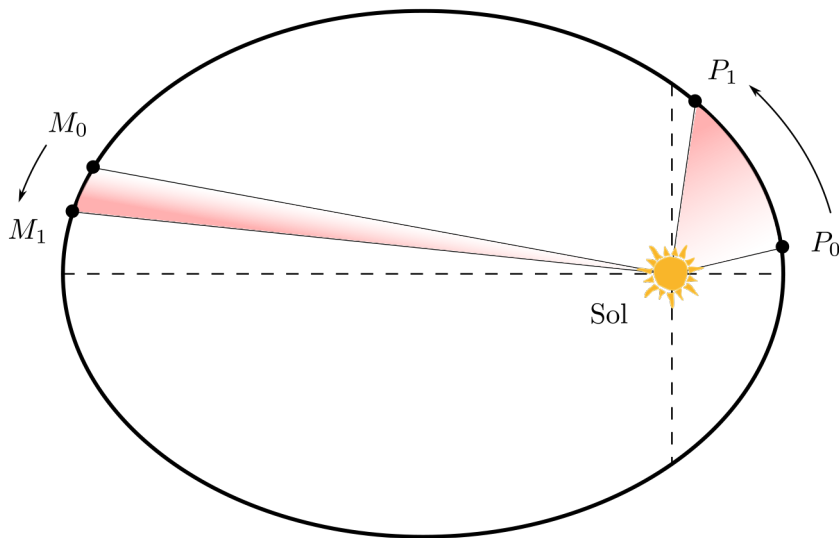


Figura 3.5: En la figura se muestran 4 posiciones de un planeta en órbita en torno al Sol, P_0 , P_1 , M_0 y M_1 . En las posiciones P_0 y P_1 el planeta se encuentra más cerca del Sol, lo que implica que su velocidad de traslación es mayor, al contrario de lo que ocurre cuando el planeta se encuentra en las ubicaciones M_0 y M_1 . En consecuencia, la distancia P_0P_1 recorrida por el planeta en un determinado intervalo de tiempo, es mayor que la distancia M_0M_1 recorrida durante el mismo intervalo de tiempo. La segunda ley de Kepler establece que el área barrida por el radio vector entre P_0 y P_1 es igual al área barrida entre M_0 y M_1 .

La segunda ley de Kepler nos indica como varía la velocidad de un planeta a medida que se mueve en torno al Sol. Nos permite establecer, tal y como se muestra en la figura 3.5, que un planeta se moverá más rápido en su posición más cercana al Sol, el perihelio, y lo hará más lento en su punto más alejado, es decir, en el afelio. Sin embargo, la segunda ley de Kepler no nos indica la forma de la trayectoria seguida por el planeta. Para determinar la trayectoria del planeta consideremos la Figura 3.4. Podemos escribir la segunda ley de Newton para el planeta en coordenadas polares como sigue

$$\left. \begin{aligned} -F &= m \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \right) \\ 0 &= m \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

de la ecuación 3.14 tenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{\rho^2} \quad (3.20)$$

la primera y segunda derivada de la distancia del planeta al Sol se pueden escribir como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} &= \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) = -\frac{h}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

reemplazando las expresiones 3.21 en la primera de las ecuaciones del sistema 3.19 se obtiene

$$-\frac{F}{m} = -\frac{h}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{h}{\rho^3} \quad (3.22)$$

sustituyendo $u = 1/\rho$ en la ecuación 3.22 llegamos al siguiente resultado

$$\frac{F}{mh^2u^2} = \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \quad (3.23)$$

ahora bien, en este caso, F corresponde a la magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre el Sol y el planeta. De acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton esta fuerza se expresa como

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{\rho^2} \hat{\rho} \quad (3.24)$$

en donde $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$. Reemplazando la magnitud de la fuerza gravitacional en la ecuación 3.23 obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (3.25)$$

La ecuación 3.25 es una ecuación diferencial de segundo orden para u , cuya solución es

$$u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (3.26)$$

en donde C es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales. La ecuación 3.26 puede se reescrita como sigue

$$\rho = \left(\frac{h^2}{GM} \right) \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (3.27)$$

Esta última ecuación corresponde en coordenadas polares a la ecuación de una cónica, en donde $\varepsilon = Ch^2/GM$ es su excentricidad. Para los planetas de nuestro sistema solar la excentricidad es siempre menor a uno, lo que implica que sus trayectorias son elípticas. Este último resultado corresponde a la primera ley de Kepler la que enunciamos como

Primera ley de Kepler: Los planetas orbitan en torno al Sol siguiendo trayectorias elípticas, en donde el Sol se ubica en uno de sus focos.

A continuación, pasaremos a derivar la tercera de las leyes de movimiento planetario de Kepler. Determinemos primero la constante de integración C . Si para $\theta = 0$ y $\rho = \rho_0$, en donde ρ_0 es el perihelio, tenemos

$$C = \frac{1}{\rho_0} - \frac{GM}{h^2} \quad (3.28)$$

conocida la constante de integración, la trayectoria del planeta se puede expresar como sigue

$$\frac{1}{\rho} = \frac{GM}{h^2} + \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{GM}{h^2} \right) \cos \theta \quad (3.29)$$

ahora bien, cuando $\theta = \pi$ el planeta se encuentra en su posición más alejada del Sol. En esta posición $\rho = \rho_1$, siendo ρ_1 el afelio. Reemplazando esta condición en la ecuación anterior obtenemos el siguiente resultado

$$\frac{\rho_0 + \rho_1}{\rho_0 \rho_1} = \frac{2GM}{h^2} \quad (3.30)$$

Como se indica en la Figura 3.6 una elipse puede ser definida como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal forma que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (sus focos) es constante. Si a denota el semieje mayor de la elipse, y b su semieje menor, podemos establecer entonces las siguientes relaciones

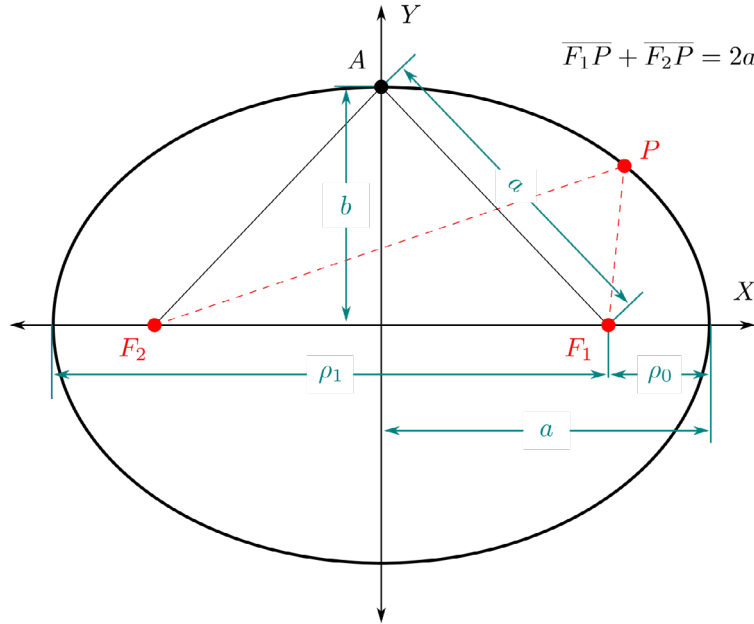


Figura 3.6: La elipse es una curva que forma parte de las secciones cónicas, está formada por un punto P que se mueve de manera tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante, es decir, $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$.

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\rho_0 + \rho_1}{2} \\ b &= \sqrt{\rho_0 \rho_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

El semieje mayor y el semieje menor de una elipse corresponden, por tanto, a la media aritmética y a la media geométrica entre el afelio y el perihelio respectivamente. Combinando las ecuaciones 3.30 y 3.31 se obtiene

$$\frac{a}{b^2} = \frac{GM}{h^2} \quad (3.32)$$

Esta última ecuación nos indica que b^2 es proporcional a a , es decir $b^2 \propto a$, donde h^2/GM es la constante de proporcionalidad. Usamos a continuación la segunda ley de Kepler para establecer una relación entre el periodo de traslación del planeta, T , y los semiejes de la elipse. Efectivamente, como el área barrida por el vector posición del planeta es constante, tenemos en virtud de la ecuación 3.18

$$T = \frac{2\pi ab}{h} \quad (3.33)$$

en donde πab es el área total encerrada por la elipse. Elevando al cuadrado la ecuación 3.33 y usando la ecuación 3.32 podemos concluir

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3 \quad (3.34)$$

En otras palabras la ecuación 3.34 nos indica que el cuadrado del periodo de traslación de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de su distancia media. Si el periodo de traslación se mide en años y la distancia media al Sol se mide en unidades astronómicas (UA)¹, la relación 3.34 se convierte en la siguiente igualdad $T^2 = a^3$. Así por ejemplo, para el planeta Júpiter, cuya distancia media al Sol es de 5UA, la tercera ley de Kepler nos permite establecer que su periodo orbital es de aproximadamente 11 años. Finalmente, podemos enunciar la tercera ley de Kepler de la siguiente manera

Tercera ley de Kepler: El cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

¹1UA corresponde a la distancia media de la Tierra al Sol y su valor es aproximadamente igual a $1,496 \times 10^{11}$ m.

3.4. Problemas capítulo 3

Problema 3.1

Como se muestra en la Figura 3.7, un brazo articulado de masa despreciable gira en el plano vertical en torno al punto O con velocidad angular constante ω . A medida que el brazo gira, empuja un pasador de masa m a lo largo de una ranura cuya forma corresponde a una porción de espiral hiperbólica de ecuación $\rho\theta = a$. Adicionalmente un resorte de rigidez k y de longitud natural a , conecta el punto O con el pasador. Para todas las preguntas considere los datos de la Tabla 3.1. Determine

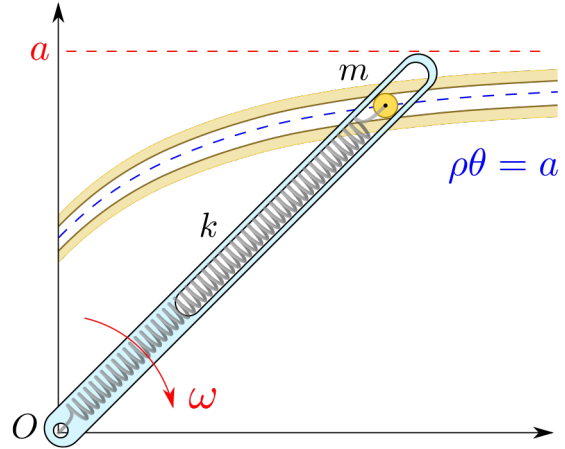


Figura 3.7: Problema 3.1.

- La velocidad del pasador cuando se encuentra a una distancia $2a$ del punto O .
- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza normal de la ranura sobre el pasador cuando $\rho = 2a$?

k , N/cm	a , cm	ω , rad/s	m , kg
85	35	2,2	2,1

Tabla 3.1: Datos problema 3.1

Solución 3.1

- El vector velocidad del pasador es

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$$

- donde $\rho = a\theta^{-1}$, entonces

$$\dot{\rho} = -a\theta^{-2}\dot{\theta}$$

tenemos que $\theta = \pi/2 - \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = -\omega$

$$\therefore \dot{\rho} = a \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right)^{-2} \omega$$

entonces el vector velocidad queda

$$\mathbf{v} = a\omega \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right)^{-2} \hat{\rho} - a\omega \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right)^{-1} \hat{\theta}$$

cuando

$$\rho = 2a \Rightarrow \pi/2 - \omega t = 1/2$$

La velocidad del pasador se muestra esquemáticamente en la Figura 3.8.

$$\therefore \mathbf{v} = 4a\omega \hat{\rho} - 2a\omega \hat{\theta}$$

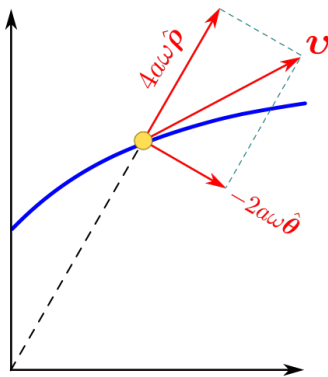


Figura 3.8: Vector velocidad y sus componentes en las direcciones $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$.

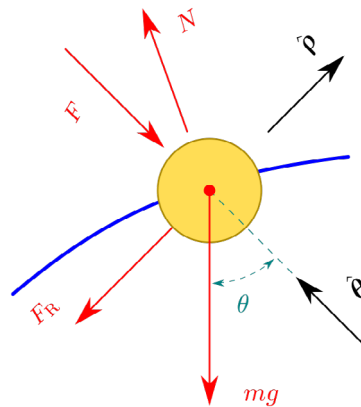


Figura 3.9: Diagrama de cuerpo libre del pasador.

b) De la Figura 3.9 tenemos

$$\mathbf{N} = N_{\rho} \hat{\rho} + N_{\theta} \hat{\theta}$$

por lo tanto, de la segunda ley de Newton tenemos

$$m \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \right) = N_\rho - k(\rho - a) - mg \sin \theta \quad (\text{P3.1-35})$$

$$m \left(\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \right) = N_\theta - F - mg \cos \theta \quad (\text{P3.1-36})$$

donde F es la fuerza ejercida por el brazo articulado sobre el pasador, F_R es la fuerza ejercida por el resorte y N es la normal de la ranura sobre el pasador, también sabemos que el vector normal es perpendicular a la tangente de la trayectoria, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$ entonces

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= N_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + N_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{v} &= 4a\omega \hat{\boldsymbol{\rho}} - 2a\omega \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \right\}$$

de aquí obtenemos

$$2N_\rho = N_\theta$$

además

$$N^2 = N_\rho^2 + N_\theta^2 = N_\rho^2 + 4N_\rho^2$$

entonces

$$\left. \begin{aligned} N_\rho &= \frac{1}{5} N \sqrt{5} \\ N_\theta &= \frac{2}{5} N \sqrt{5} \end{aligned} \right\}$$

tenemos además que

$$\ddot{\rho} = 2a\theta^{-3}\dot{\theta}^2 - a\theta^{-2}\ddot{\theta}$$

sin embargo $\ddot{\theta} = 0$, entonces

$$\ddot{\rho} = 2a\omega^2\theta^{-3}$$

por lo tanto, reemplazando en la ecuación P3.1-35

$$ma\omega^2\theta^{-1} (2\theta^{-2} - 1) = \frac{1}{5}N\sqrt{5} - ak(\theta^{-1} - 1) - mg \sin \theta$$

cuando $\rho = 2a \Rightarrow \theta = 1/2$

$$14a\omega^2m = \frac{1}{5}N\sqrt{5} - ak - mg \sin \left(\frac{1}{2}\right)$$

por lo tanto la normal es

$$N = \frac{5}{\sqrt{5}} \left(14a\omega^2m + mg \sin \left(\frac{1}{2}\right) + ak \right)$$

evaluando numéricamente: $N = 6\,206\,N$

Problema 3.2

El sistema de la Figura 3.10 se compone de una barra vertical unida a una barra inclinada a 30° de la horizontal, ambas de masa despreciable. Todo el sistema gira con respecto al eje de la barra vertical con velocidad angular constante ω . En la barra inclinada un collarín de masa m se desliza sin fricción y al mismo tiempo se encuentra unido a un resorte. El resorte que posee rigidez k se encuentra a su vez conectado a un collarín que desliza sin fricción sobre la barra vertical.

Con la información entregada en la Tabla 3.2, determine

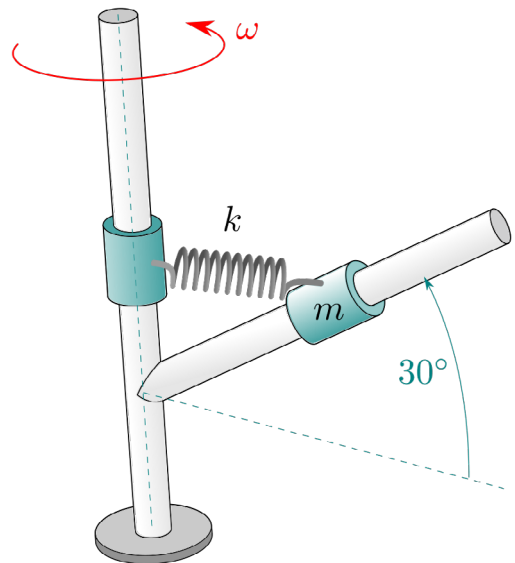


Figura 3.10: Problema 3.2.

a) Suponga que el collarín en la barra vertical posee masa despreciable, de manera tal que el resorte siempre permanece paralelo al suelo. En el instante inicial el resorte se encuentra en su longitud natural igual a l_0 . ¿A qué distancia del eje vertical se ubicará el collarín de masa m cuando este deje de deslizarse?

b) Suponga ahora que la masa del collarín en la barra vertical es igual a $m/2$ (el resorte ahora ya no permanece paralelo al suelo) y que la longitud natural del resorte es cero. ¿A qué distancia del eje vertical se ubicará el collarín de masa m cuando ambos collarines dejen de deslizarse?

$k, \text{ N/cm}$	$l_0, \text{ cm}$	$\omega, \text{ rad/s}$	$m, \text{ kg}$
58	15	7,5	1,2

Tabla 3.2: Datos problema 3.2

Solución 3.2

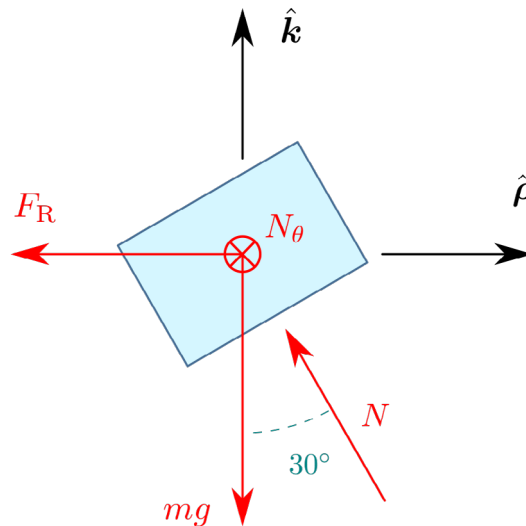


Figura 3.11: Diagrama de cuerpo libre del collarín.

a) En coordenadas cilíndricas tenemos que $\theta = \omega t$, $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = 0$, y usando la segunda ley de Newton de acuerdo a la Figura 3.11

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -k(\rho - l_0) - \frac{N}{2} \quad (\text{P3.2-37})$$

$$m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = N_\theta \quad (\text{P3.2-38})$$

$$m\ddot{z} = \frac{N\sqrt{3}}{2} - mg \quad (\text{P3.2-39})$$

en el instante en que el collarín deja de deslizar $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, $\dot{z} = \ddot{z} = 0$

$$m\rho\omega^2 = k(\rho - l_0) + \frac{N}{2} \quad (\text{P3.2-40})$$

$$0 = \frac{N\sqrt{3}}{2} - mg \quad (\text{P3.2-41})$$

entonces $N = (2\sqrt{3}/3)mg$, reemplazando en la ecuación P3.2-40, tenemos

$$m\rho\omega^2 = k(\rho - l_0) + \frac{\sqrt{3}}{3}mg$$

$$(m\omega^2 - k)\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}mg - kl_0$$

por lo tanto, la distancia a la cual el collarín se ubica del eje vertical es

$$\rho = \frac{mg\sqrt{3} - 3kl_0}{3(m\omega^2 - k)}$$

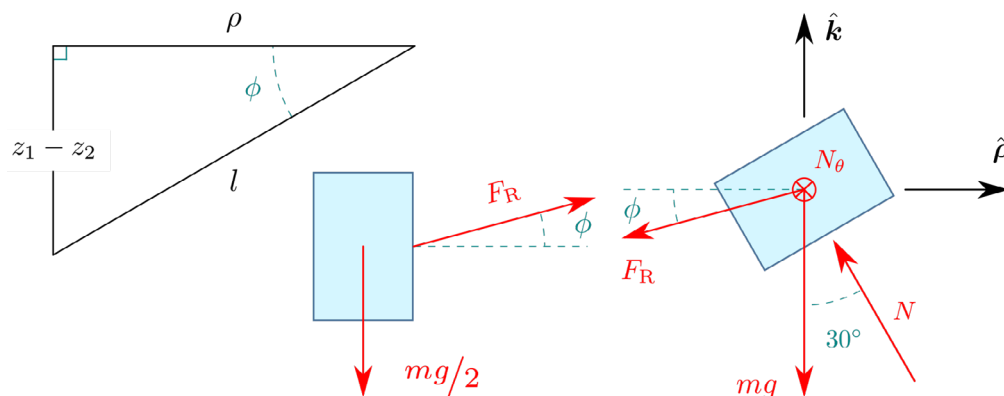


Figura 3.12: Geometría y diagrama de cuerpo libre de ambos collarines.

b) Del DCL mostrado en la Figura 3.12 y aplicando la segunda ley de Newton, tenemos

$$\frac{m}{2}\ddot{z}_2 = F_R \sin \phi - \frac{m}{2}g \quad (\text{P3.2-42})$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -F_R \cos \phi - \frac{N}{2} \quad (\text{P3.2-43})$$

$$m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = N_\theta \quad (\text{P3.2-44})$$

$$m\ddot{z}_1 = \frac{N\sqrt{3}}{2} - mg - F_R \sin \phi \quad (\text{P3.2-45})$$

donde $F_R = kl$, también $\sin \phi = (z_1 - z_2)/l$ y $\cos \phi = \rho/l$ como se ve en la Figura 3.12 por lo tanto, reemplazando nos queda

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{2}\ddot{z}_2 &= k(z_1 - z_2) - \frac{m}{2}g \\ m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) &= -k\rho - \frac{N}{2} \\ m\ddot{z}_1 &= \frac{N\sqrt{3}}{2} - mg - k(z_1 - z_2) \end{aligned} \right\}$$

cuando ambos collarines dejan de desliza $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$, $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0$ y $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, entonces queda

$$k(z_1 - z_2) = \frac{m}{2}g \quad (\text{P3.2-46})$$

$$m\rho\omega^2 = k\rho + \frac{N}{2} \quad (\text{P3.2-47})$$

$$\frac{N\sqrt{3}}{2} = mg + k(z_1 - z_2) \quad (\text{P3.2-48})$$

de la ecuación P3.2-46 reemplazamos en la ecuación P3.2-48, entonces $N = mg\sqrt{3}$

$$m\rho\omega^2 = k\rho + \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

$$\therefore \rho = \frac{mg\sqrt{3}}{2(m\omega^2 - k)}$$

Problema 3.3

Al cometa 109P/Swift-Tuttle le toma 133 años en completar una órbita alrededor del Sol. Posee un afelio igual a 51,225UA, y una excentricidad $\varepsilon = 0,9632$. Este objeto estelar es considerado por muchos astrónomos como el objeto más peligroso conocido por la humanidad, debido a que ingresa dentro de la órbita terrestre con probabilidades de impactar la Tierra. Determine

- El perihelio y las rapidezces mínima y máxima del cometa.
- La rapidez del cometa cuando pasa por la órbita terrestre. Asuma que la órbita de la Tierra es circular y que la masa del Sol es $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$.
- Determine el ángulo que asumirían el vector velocidad del cometa y el vector velocidad de la Tierra en caso de colisión.

Solución 3.3

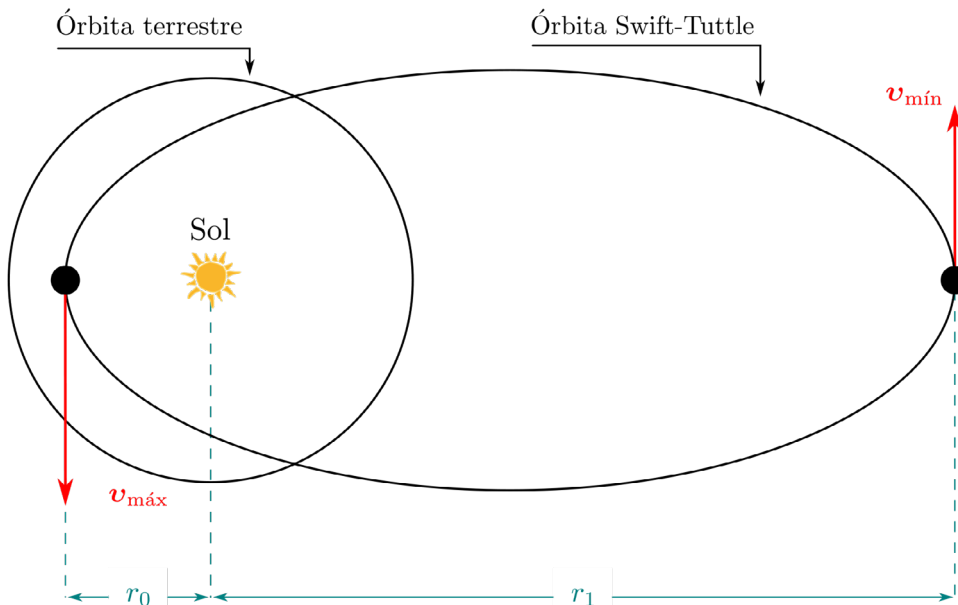


Figura 3.13: Órbita terrestre y órbita del cometa.

a) Para la órbita elíptica del cometa la excentricidad se puede expresar como

$$\varepsilon = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}$$

$$\therefore r_0 = r_1 \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)$$

donde r_0 y r_1 se indican en la Figura 3.13, los parámetros a y b de la órbita elíptica son

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{r_1}{1 + \varepsilon} \\ b &= r_1 \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \end{aligned} \right\}$$

además, sabemos que el periodo de traslación se expresa como

$$T = \frac{2\pi ab}{h}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi r_1^2 (1 - \varepsilon)^{1/2}}{h (1 + \varepsilon)^{3/2}}$$

por lo tanto, el momento angular por unidad de masa de Swift-Tuttle

$$h = \frac{2\pi r_1^2 (1 - \varepsilon)^{1/2}}{T (1 + \varepsilon)^{3/2}} \quad (\text{P3.3-49})$$

por conservación del momento angular, tenemos

$$r_0 v_{\text{máx}} = r_1 v_{\text{mín}} = h$$

haciendo las sustituciones y manipulando algebraicamente:

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{máx}} &= \frac{2\pi r_1}{T \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ v_{\text{mín}} &= \frac{2\pi (1 - \varepsilon)^{1/2}}{T (1 + \varepsilon)^{3/2}} r_1 \end{aligned} \right\}$$

evaluando numéricamente

$$\begin{aligned} r_0 &= 1,436 \times 10^{11} \text{ m} && (0,9602 \text{ UA}) \\ v_{\text{máx}} &= 4,268 \times 10^4 \text{ m/s} && (153\,651,652 \text{ km/h}) \\ v_{\text{mín}} &= 800,052 \text{ m/s} && (2\,880,186 \text{ km/h}) \end{aligned}$$

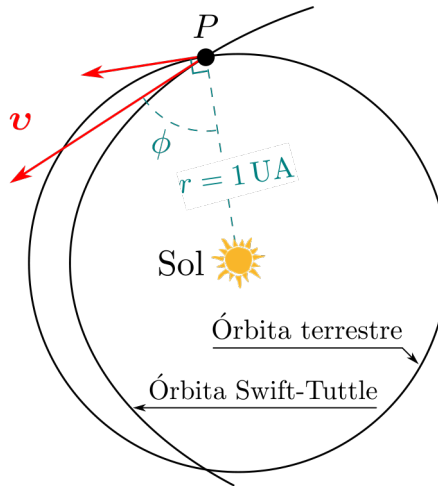


Figura 3.14: El cometa cruza la órbita terrestre en el punto P .

b) Cuando el cometa cruza la órbita terrestre su distancia al Sol es $r = 1 \text{ UA}$ como se ve en la Figura 3.14. Por conservación de energía mecánica tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 - \frac{GM_{\odot}m}{r_0} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\odot}m}{r} \\ \therefore v &= \sqrt{v_{\text{máx}}^2 + 2GM_{\odot} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} \end{aligned}$$

evaluando numéricamente

$$v = 4,181 \times 10^4 \text{ m/s} \quad (150\,517,989 \text{ km/h})$$

c) El momento angular por unidad de masa de Swift-Tuttle en P

$$h = vr \sin \phi$$

$$\therefore \sin \phi = \frac{h}{vr}$$

donde el ángulo ϕ se indica en la Figura 3.14, el valor de h lo obtenemos de la ecuación P3.3-49

$$h = 6,131 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\sin \phi = 0,9802$$

$$\therefore \phi = 78,579^\circ$$

por lo tanto, el ángulo entre los vectores de velocidad de Swift-Tuttle y la Tierra es de $11,421^\circ$.

Problema 3.4

Una partícula de masa m puede moverse sin fricción a lo largo de un alambre de forma parabólica $z = a\rho^2$. Al mismo tiempo se encuentra unida por medio de un resorte de rigidez k al punto $(0, b)$ en el eje Z . Si el alambre se hace girar con velocidad angular constante en torno al eje Z , demuestre que la posición estable de la partícula es

$$\rho = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m\omega^2 + 2kab - k - 2mga}{2k}}$$

Solución 3.1

Realicemos un esquema más simplificado para abordar el problema, como se ve en la Figura 3.15. Antes de determinar la posición estable de la partícula, realicemos el DCL del problema como en la Figura 3.16 para identificar todos los ángulos que sean necesarios, y determinemos las correspondientes relaciones trigonométricas. Para el ángulo β de acuerdo a la Figura 3.16 tenemos que

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{b - z}{\sqrt{\rho^2 + (b - z)^2}} \\ \cos \beta &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (b - z)^2}} \end{aligned} \right\}$$

Ahora para determinar el ángulo α sabemos que

$$\tan \alpha' = \frac{dz}{d\rho} = 2a\rho$$

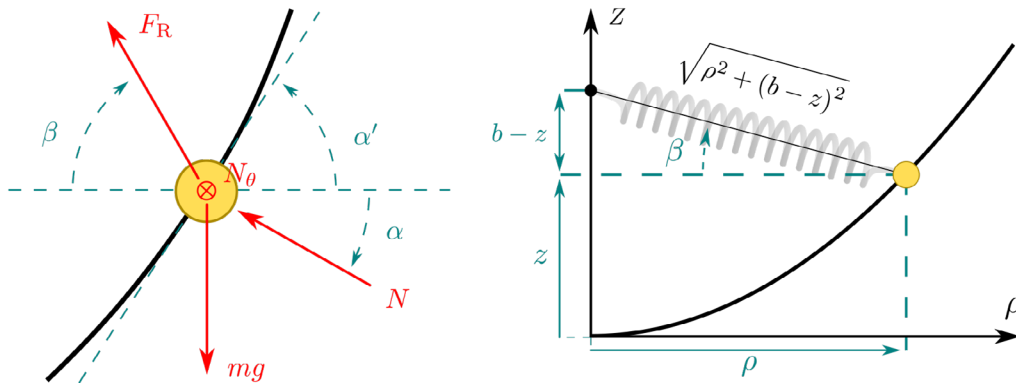


Figura 3.16: Diagrama de cuerpo libre y geometría del problema 3.4.

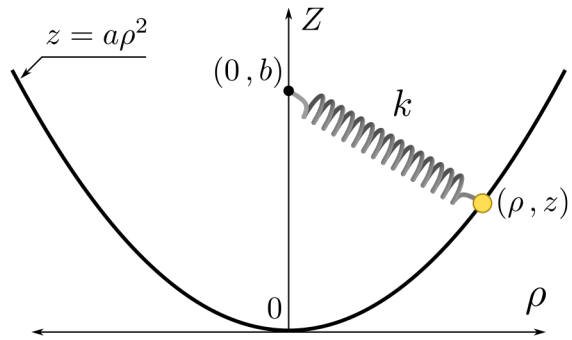


Figura 3.15: Esquema del problema 3.4.

por lo tanto:²

$$\tan \alpha = \frac{1}{2a\rho}$$

y finalmente tenemos

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2\rho^2}} \\ \cos \alpha &= \frac{2a\rho}{\sqrt{1 + 4a^2\rho^2}} \end{aligned} \right\}$$

Usando la segunda ley de Newton en coordenadas cilíndricas de acuerdo a la Figura 3.16 obtenemos

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) &= -F_R \cos \beta - N \cos \alpha \\ m(2\dot{\rho}\omega) &= N_\theta \\ m\ddot{z} &= F_R \sin \beta + N \sin \alpha - mg \end{aligned}$$

donde $F_R = k\delta$ y $\delta = \sqrt{\rho^2 + (b - z)^2}$ es la fuerza del resorte y su deformación respectivamente. Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) &= -k\rho - N \frac{2a\rho}{\sqrt{1 + 4a^2\rho^2}} \\ m\ddot{z} &= k(b - z) + N \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2\rho^2}} - mg \end{aligned} \quad (\text{P3.4-50})$$

Sumando ambas ecuaciones y multiplicando la ecuación P3.4-50 por $2a\rho$, obtenemos lo siguiente

$$m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) + 2ma\rho\ddot{z} = 2a\rho k(b - z) - k\rho - 2mgap$$

cuando la partícula se encuentra en la posición estable $\ddot{\rho} = \ddot{z} = 0$ y como $z = a\rho^2$, obtenemos:

² $\tan(180 - \alpha) = -1/2a\rho \Rightarrow \tan \alpha = 1/2a\rho$

$$m\rho\omega^2 + 2kab\rho - 2ka^2\rho^3 - k\rho - 2mga\rho = 0 \quad (\text{P3.4-51})$$

la posición estable de la masa corresponde a la solución de la ecuación P3.4-51. Factorizando la ecuación P3.4-51 tenemos

$$\rho \left(m\omega^2 + 2kab - 2ka^2\rho^2 - k - 2mga \right) = 0$$

por lo tanto, la primera solución y posición estable es

$$\rho = 0$$

por otro lado tenemos que

$$m\omega^2 + 2kab - 2ka^2\rho^2 - k - 2mga = 0$$

y despejando obtenemos

$$|\rho| = \sqrt{\frac{m\omega^2 + 2kab - k - 2mga}{2ka^2}}$$

de la cual escogemos la solución positiva, por lo tanto la segunda solución³ es

$$\rho = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m\omega^2 + 2kab - k - 2mga}{2k}}$$

¿Qué dimensiones debe tener a y b para que ρ tenga sentido dimensional?

³La tercera solución es exactamente igual a la segunda con la única diferencia que se encuentra en el cuadrante negativo de ρ .

CAPÍTULO 4

Energía de la partícula

4.1. Teorema de trabajo y energía

Consideremos una partícula de masa m sobre la que actúa la fuerza neta $\mathbf{F}$. La fuerza no necesariamente es constante, por tanto su magnitud y dirección pueden variar en el tiempo. Tal y como se indica en la Figura 4.1, a medida que la partícula se mueve en el espacio, el trabajo total ejercido por la fuerza al mover la partícula desde la posición $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ puede ser calculado sumando los trabajos infinitesimales $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, es decir, evaluando la siguiente integral de línea vectorial

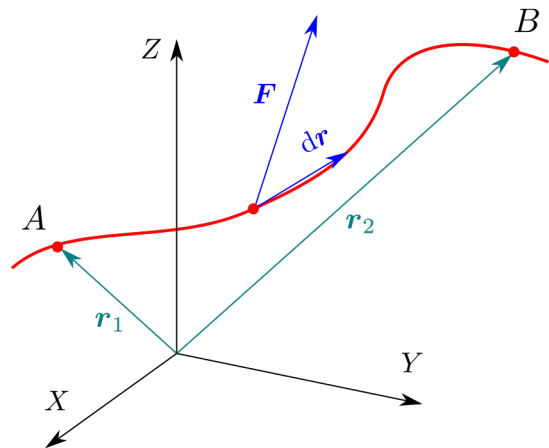


Figura 4.1: La partícula P se desplaza entre los puntos A y B sujeta a la acción de la fuerza F .

$$W_{r_1 \rightarrow r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.1)$$

de la segunda ley de Newton sabemos que $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, por tanto

$$W_{r_1 \rightarrow r_2} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \quad (4.2)$$

sin embargo,

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad (4.3)$$

usando la expresión anterior la integral queda como

$$W_{r_1 \rightarrow r_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt \quad (4.4)$$

Si definimos la energía cinética de la partícula como $T = \frac{1}{2} m v^2$, el integrando de la ecuación 4.4 corresponde al diferencial dT . El trabajo realizado por la fuerza se puede expresar de la siguiente manera

$$W_{r_1 \rightarrow r_2} = \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (4.5)$$

o bien

$$\Delta T = W_{r_1 \rightarrow r_2} \quad (4.6)$$

Esta última igualdad, deducida a partir de la segunda ley de Newton, se conoce como el teorema de trabajo y energía, y establece que el trabajo realizado por una fuerza que mueve a una partícula entre dos puntos es igual a la variación de su energía cinética. En otras palabras, proporciona una relación entre los conceptos de energía cinética y trabajo. La ventaja de la ecuación 4.6 sobre la segunda ley de Newton reside en el hecho que nos permite analizar el movimiento de una partícula sin tener que conocer las fuerzas de restricción que actúan sobre ella. Estas fuerzas de restricción, tales como las fuerzas normales que una superficie ejerce sobre la partícula, en general no ejercen trabajo¹, ya que son perpendiculares a la dirección del movimiento y, en consecuencia, no necesitan ser calculadas si queremos utilizar la ecuación 4.6.

4.2. Energía potencial y fuerzas conservativas

El lado izquierdo de la ecuación 4.6 depende solo de la velocidad de la partícula en los puntos extremos de la trayectoria. El lado derecho, que es igual al trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre la partícula y que, a su vez, corresponde a la integral de línea

¹Un caso en el que no se cumple esto último se estudia en el problema 4.2.

$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en general, depende de la trayectoria de la partícula entre dichos puntos. La integral dependerá únicamente de los límites de integración solo si el elemento de trabajo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es igual al diferencial exacto de cierta función Ψ , es decir, si $d\Psi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, en cuyo caso el trabajo se expresa como

$$W_{r_1 \rightarrow r_2} = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \quad (4.7)$$

si expandimos el elemento de trabajo y el diferencial $d\Psi$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ d\Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

podemos concluir que

$$F_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad F_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad F_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (4.9)$$

Si la función Ψ existe decimos que la fuerza $\mathbf{F}$ es derivable de un potencial. En principio nos puede parecer extraño que efectivamente tal función exista, sin embargo, como veremos más adelante fuerzas como la gravitacional, elástica, y electrostática efectivamente se derivan de un potencial. Tal y como se desprende de la expresión para el diferencial de Ψ en la ecuación 4.8, la función Ψ depende solo de la posición de la partícula. Este último resultado, en conjunto con la ecuación 4.9, nos indica que la fuerza debe ser función solo de la posición de la partícula y no de su velocidad u otra variable. Además, resulta inmediato concluir a partir de la ecuación 4.7 que si la fuerza es derivable de un potencial entonces el trabajo que la fuerza realiza al mover una partícula entre dos puntos es independiente del camino que recorre la partícula. Con estas dos últimas conclusiones en mente, definimos una fuerza conservativa como toda fuerza que cumple con las siguientes dos condiciones:

- a) La fuerza depende solo de la posición de la partícula.
- b) El trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula de un punto a otro es independiente del recorrido.

Para toda fuerza conservativa existe una energía potencial asociada, la que defini-

mos como el valor negativo del trabajo requerido por la fuerza para trasladar una partícula desde una posición de referencia (definida por el vector $\mathbf{r}_0$) hasta otra posición. En términos matemáticos expresamos la energía potencial como

$$U(\mathbf{r}) = -W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}} = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.10)$$

Tal y como se muestra en la Figura 4.2, si una partícula es desplazada por una fuerza desde la posición $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_2$ pasando por la posición intermedia $\mathbf{r}_1$, el trabajo total realizado por la fuerza se puede descomponer como

$$W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_2} = W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1} + W_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2} \quad (4.11)$$

o bien

$$W_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2} = W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_2} - W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1} \quad (4.12)$$

Si la fuerza que actúa sobre la partícula es conservativa entonces la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$W_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2} = -(U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)) = -\Delta U \quad (4.13)$$

reemplazando este último resultado en la ecuación 4.6 tenemos

$$\Delta T + \Delta U = 0 \quad (4.14)$$

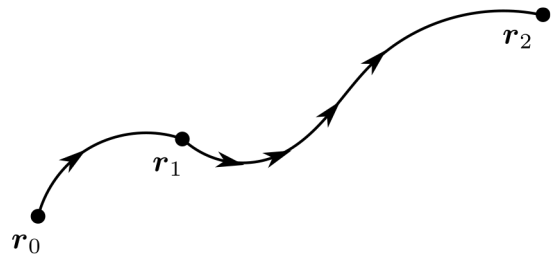


Figura 4.2: Desde una ubicación de referencia definida por el vector $\mathbf{r}_0$ una partícula es empujada por una fuerza conservativa hasta la posición $\mathbf{r}_1$ y desde allí hasta la posición $\mathbf{r}_2$. El trabajo total es igual a la suma de los trabajos en cada uno de los tramos.

llamando $E = T + U$ a la energía mecánica de la partícula, la ecuación anterior se convierte en

$$\Delta E = 0 \quad (4.15)$$

es decir, que si sobre la partícula actúan solo fuerzas de tipo conservativo, la energía mecánica se conserva. Naturalmente, la importancia de la ecuación 4.15 recae en la existencia de

tales fuerzas conservativas. Si estas últimas constituyen solo una definición ad hoc que nos permite establecer la ley de conservación de energía mecánica y no existen en la realidad, entonces la aplicabilidad de la ecuación 4.15 sería nula. Sin embargo, y como ya mencionamos, muchas fuerzas son efectivamente de carácter conservativo, entre las que se cuenta el importante caso de la fuerza gravitacional. Para convencernos de esto último, a continuación pasaremos a demostrar que las fuerzas gravitacionales son efectivamente conservativas. Consideremos una partícula de masa m sujeta a la fuerza gravitacional que ejerce un cuerpo de masa M que se ubica en el origen del sistema coordenado. La partícula recorre una trayectoria cualquiera entre dos puntos A y B . En cualquier punto de dicha trayectoria podemos expresar la fuerza gravitacional como²

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \langle x, y, z \rangle \quad (4.16)$$

evidentemente la fuerza gravitacional solo depende de la posición de la partícula, con lo que cumple con la primera de las condiciones para clasificarla como conservativa. Por otra parte, si describimos la trayectoria de la partícula como $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$, el elemento de desplazamiento queda como

$$d\mathbf{r} = \langle \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \rangle dt \quad (4.17)$$

en consecuencia el trabajo realizado por la fuerza gravitacional está dado por la siguiente integral

$$W = -GMm \int_{t_0}^{t_1} \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dt \quad (4.18)$$

el integrando de la ecuación 4.18 resulta ser un diferencial exacto. En efecto, si realizamos el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad (4.19)$$

² $\hat{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}/|\mathbf{r}|$

tomando diferenciales obtenemos

$$du = -\frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dt \quad (4.20)$$

que corresponde precisamente el integrando de la ecuación 4.18. De esta forma, obtenemos el trabajo realizado por la fuerza gravitacional como sigue

$$W = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (4.21)$$

el trabajo solo depende de la posición inicial y final de la partícula, y dado que llegamos a este resultado asumiendo una trayectoria arbitraria, concluimos que la fuerza gravitacional cumple también con la segunda de las condiciones necesarias para ser clasificada como una fuerza conservativa. La energía potencial gravitacional se obtiene escogiendo como posición de referencia $r_0 \rightarrow \infty$, es decir

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r} \quad (4.22)$$

Veamos ahora lo que ocurre cuando sobre la partícula actúan fuerzas no conservativas, tales como la fricción o las fuerzas viscosas que dependen de la velocidad. En esta situación podemos utilizar la ecuación 4.6 y separar el trabajo realizado por las fuerzas conservativas W_c del trabajo realizado por las fuerzas no conservativas W_{nc} como sigue

$$\Delta T = W_c + W_{nc} \quad (4.23)$$

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas puede ser expresado en términos de la energía potencial correspondiente, es decir, $W_c = -\Delta U$. Llegamos, por tanto, al siguiente resultado

$$\Delta E = W_{nc} \quad (4.24)$$

A diferencia de la ecuación 4.15, la ecuación 4.24 nos indica que la energía mecánica no se conserva. Sin embargo, esto último no debe llevarnos a pensar que la energía total no se conserva. Las fuerzas no conservativas transforman, en este caso, parte de la energía me-

cánica en energía interna, la que es manifestación de los movimientos y configuraciones de las moléculas, átomos y partículas subatómicas que constituyen la materia del sistema. Específicamente, la energía interna se compone de la energía cinética interna y la energía potencial interna. La energía cinética interna corresponde, a su vez, a energía cinética de traslación de las moléculas (responsable de la temperatura), así como la energía cinética debida a la rotación de las moléculas en torno a sus centros de masa y la energía cinética de vibración de los átomos dentro de las moléculas. Por otro lado, la energía potencial interna surge como resultado de la separación de las moléculas al vencer las fuerzas intermoleculares de Van der Waals que las unen. Por ejemplo, cuando la fricción con el aire frena un proyectil, no se viola la ley de conservación de energía, aunque el proyectil pierde energía cinética al frenarse, los movimientos aleatorios de las moléculas de aire y del proyectil, se hacen ligeramente más energéticos debido al *calentamiento* que produce la fricción. En consecuencia, las fuerzas no conservativas parecen serlo solo a gran escala, ya que si tenemos en cuenta lo que ocurre a nivel microscópico, las fuerzas no conservativas transforman parte de la energía mecánica a nivel macroscópico en energía mecánica a nivel microscópico. Todo esto último queda reflejado en la primera ley de la termodinámica, que incorpora la energía interna del sistema, así como las transferencias de energía entre los cuerpos por medio de calor y el trabajo realizado por el sistema o sobre este. De esta forma es la primera ley de la termodinámica la que establece la conservación total de la energía.

4.3. Problemas capítulo 4

Problema 4.1

Un bloque de masa m descansa en el extremo superior de un plano inclinado. El bloque que se conecta, tal y como se indica en la Figura 4.3, a un resorte de rigidez k y longitud natural cero, y se lanza desde el extremo superior con velocidad v_0 . Si el coeficiente de fricción dinámico entre el bloque y el plano inclinado es μ , determine la velocidad inicial que debe darse al bloque para que alcance justo a llegar a la base del plano inclinado.

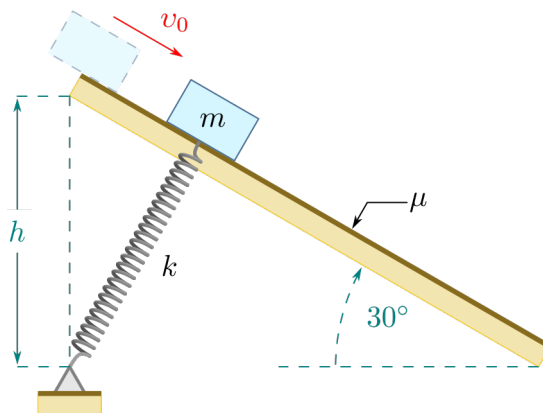


Figura 4.3: Problema 4.1.

Solución 4.1

En el extremo superior la energía mecánica del bloque es

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh + \frac{1}{2}kh^2$$

en el extremo inferior la energía mecánica es

$$E_f = \frac{1}{2}k(h\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}kh^2$$

la fricción entre el bloque y el plano inclinado corresponde una fuerza no conservativa. Determinemos la magnitud de la fuerza normal cuando el bloque ha descendido una distancia x a lo largo del plano inclinado.

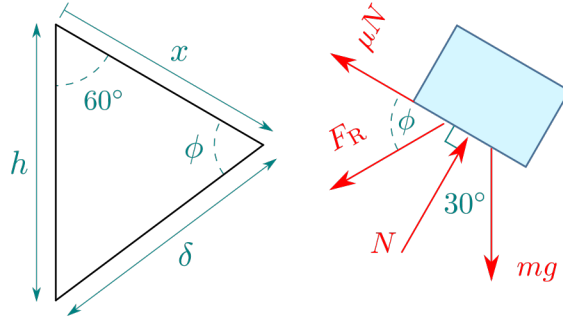


Figura 4.4: Geometría y diagrama de cuerpo libre del problema 4.1.

En base a la Figura 4.4, por teorema del coseno

$$\delta^2 = x^2 + h^2 - xh$$

y del DCL de la Figura 4.4

$$+ \nearrow \sum F = 0 \Rightarrow N = mg \cos 30^\circ + f_R \sin \phi \quad (\text{P4.1-25})$$

pero por teorema del seno

$$\frac{\sin \phi}{h} = \frac{\sin 60^\circ}{\delta} \Rightarrow \sin \phi = \frac{h\sqrt{3}}{2\delta}$$

por lo tanto, en la ecuación P4.1-25 obtenemos

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2} (mg + kh)$$

$$f_R = \frac{\mu\sqrt{3}}{2} (mg + kh)$$

El trabajo realizado por la fricción

$$W_{nc} = -\mu h\sqrt{3} (mg + kh)$$

por lo tanto, usando la ley de conservación de energía mecánica, $\Delta E = W_{nc}$

$$\frac{3}{2}kh^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh - \frac{1}{2}kh^2 = -\mu h\sqrt{3} (mg + kh)$$

finalmente despejando v_0 , tenemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{m} \left(kh^2 (\mu\sqrt{3} + 1) + mgh (\mu\sqrt{3} - 1) \right)}$$

Problema 4.2

En el sistema de la Figura 4.5 dos barras, una vertical y la otra inclinada a 30° de la horizontal, ambas de masa despreciable, se encuentran unidas como se indica. En la barra inclinada un collarín de masa m se desliza sin fricción y se encuentra unido a un resorte de rigidez k y longitud natural l_0 que lo une con el punto O . Todo el sistema gira con respecto al eje vertical con velocidad angular ω .

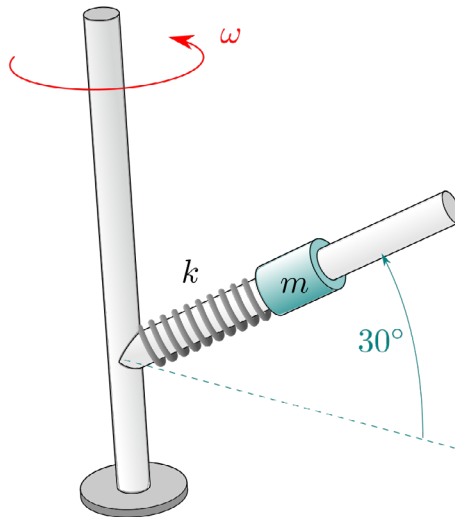


Figura 4.5: Problema 4.2.

- a) En el instante inicial el collarín se encuentra fijo a la barra inclinada a una distancia $l_0/2$ del punto O por medio de un tope. El tope se libera permitiendo ahora el movimiento del collarín a lo largo de la barra inclinada. Determine la velocidad del collarín cuando se encuentra a una distancia l_0 del punto O .

Solución 4.2

De acuerdo a la Figura 4.6, planteamos la segunda ley de Newton en coordenadas esféricas considerando que $\dot{\theta} = \omega$ y $\phi = 30^\circ$, con lo que se obtiene

$$m\left(\ddot{r} - \frac{3}{4}r\omega^2\right) = F_R - \frac{1}{2}mg \quad (\text{P4.2-26})$$

$$m\dot{r}\omega\sqrt{3} = N_\theta \quad (\text{P4.2-27})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}mr\omega^2 = N - \frac{\sqrt{3}}{2}mg \quad (\text{P4.2-28})$$

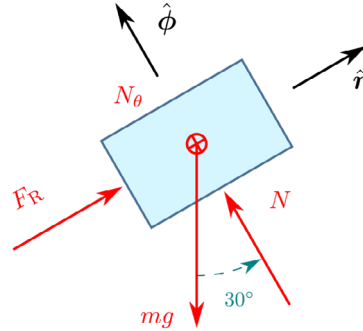


Figura 4.6: Diagrama de cuerpo libre del problema 4.2.

Resulta importante que nos detengamos a analizar lo que ocurre con las fuerzas de restricción en este problema. Específicamente comprobemos si las fuerzas normales N y N_θ realizan o no trabajo. Para la normal N , de la ecuación P4.2-28 tenemos:

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}mr\omega^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mg \right) \hat{\phi}$$

El desplazamiento infinitesimal de la partícula lo podemos determinar sabiendo que $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v} \Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, la velocidad del collarín en coordenadas esféricas es:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\sqrt{3}}{2}r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{P4.2-29})$$

Por consiguiente $d\mathbf{r} = \dot{r}dt\hat{\mathbf{r}} + \frac{\sqrt{3}}{2}r\omega dt\hat{\boldsymbol{\theta}}$, de donde resulta claro que $\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ya que tanto N como $d\mathbf{r}$ no comparten componentes en común, es decir que N es siempre perpendicular a la trayectoria de la partícula y en consecuencia no realiza trabajo. Analicemos ahora lo que ocurre con la normal N_θ , de la ecuación P4.2-27 obtenemos: $N_\theta = m\dot{r}\omega\sqrt{3}\hat{\boldsymbol{\theta}}$, si realizamos el producto punto $\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}$:

$$dW_{nc} = \mathbf{N}_\theta \cdot d\mathbf{r} = \frac{3}{2}mr\dot{r}\omega^2 dt \neq 0$$

por lo tanto, la fuerza normal N_θ realiza trabajo no conservativo, ya que no es perpendicular a la dirección del movimiento. Como $\dot{r}dt = dr$, y considerando que en el instante inicial

$r = l_0/2$ y en el instante final $r = l_0$, tenemos lo siguiente

$$W_{nc} = \frac{3}{2}m\omega^2 \int_{l_0/2}^{l_0} r \, dr$$

$$W_{nc} = \frac{9}{16}ml_0^2\omega^2$$

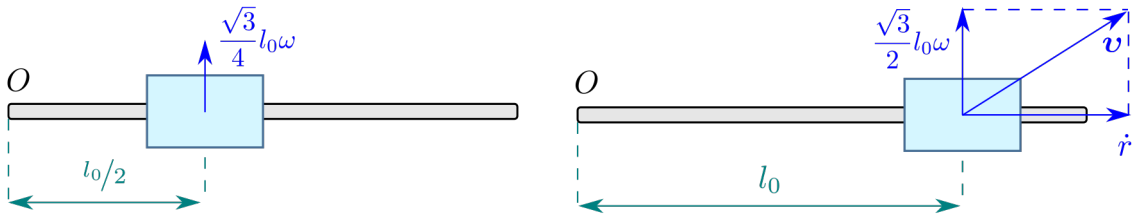


Figura 4.7: Velocidades del collarín en el instante inicial y final.

Determinemos la energía del sistema. En base a la Figura 4.7, en el instante inicial el collarín posee una velocidad dada por

$$v_0 = \frac{l_0}{2} \cos 30^\circ \omega = \frac{\sqrt{3}}{4}l_0\omega$$

por tanto, la energía inicial es

$$E_i = \frac{1}{2}m \left(\frac{\sqrt{3}}{4}l_0\omega \right)^2 + mg\frac{l_0}{2} \sin 30^\circ + \frac{1}{2}k \left(\frac{l_0}{2} - l_0 \right)^2$$

$$E_i = \frac{3}{32}ml_0^2\omega^2 + \frac{1}{4}mgl_0 + \frac{1}{4}kl_0^2$$

para el instante final el collarín posee una velocidad radial, $\dot{r}$, y una velocidad producto de la rotación, como se muestra en la Figura 4.7, dada por

$$v_\theta = l_0 \cos 30^\circ \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}l_0\omega$$

por tanto, la energía final es

$$E_f = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l_0\omega \right)^2 + \dot{r}^2 \right] + mgl_0 \sin 30^\circ + \frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2$$

$$E_f = \frac{3}{8}ml_0^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{4}mgl_0$$

y utilizando $\Delta E = W_{nc}$, podemos determinar la velocidad radial del collarín, esto es

$$\dot{r} = \frac{1}{4} \sqrt{9l_0^2\omega^2 - 8 \left(g - \frac{kl_0}{m} \right) l_0}$$

a) Finalmente para determinar la velocidad del collarín cuando se encuentra a una distancia l_0 del punto O , se sabe que la velocidad del collarín puede ser escrita como

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4} \sqrt{9l_0^2\omega^2 - 8 \left(g - \frac{kl_0}{m} \right) l_0} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_0\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Problema 4.3

Dos cuentas de masa m_1 y m_2 se encuentran unidas por medio un cable inextensible como se indica en la Figura 4.8. La cuenta de masa m_1 puede deslizarse sin fricción por sobre la superficie de un cono, en tanto que la masa m_2 está obligada a moverse de manera vertical. Si en el instante inicial la masa m_1 tiene una velocidad inicial v_0 y la distancia entre esta última y el vértice del cono es l_0 , determine

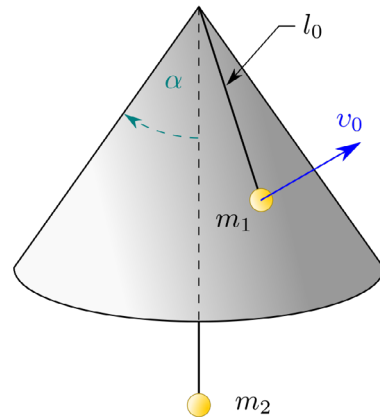


Figura 4.8: Problema 4.3.

- a) La velocidad de m_2 cuando ha descendido una distancia h .
 b) Para la partícula m_1 verifique que la variación del momento angular con respecto al vértice del cono es igual al momento total, esto es $\sum \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$.

Solución 4.3

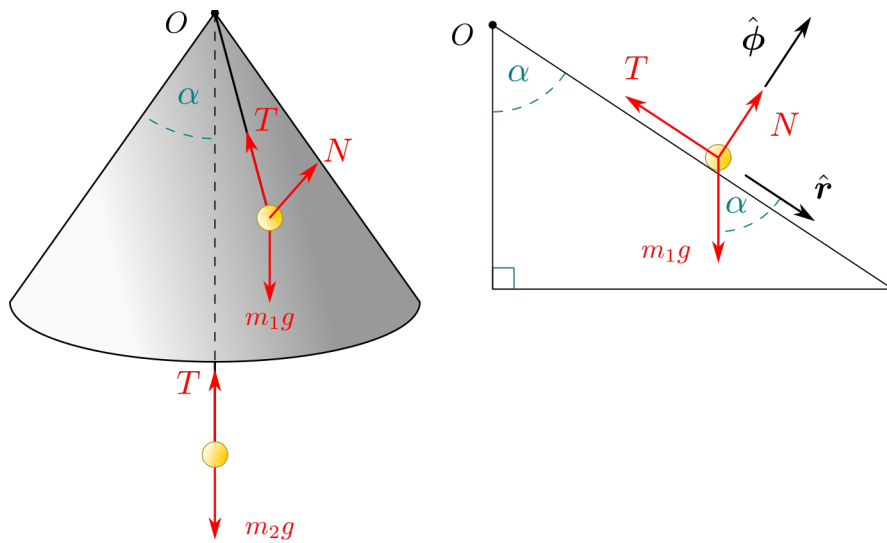


Figura 4.9: Diagrama de cuerpo libre para el problema 4.3.

Planteemos la segunda ley de Newton en coordenadas esféricas para la masa m_1 :

$$m_1 (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi) = m_1 g \cos \alpha - T \quad (\text{P4.3-30})$$

$$m_1 (r\ddot{\theta} \cos \phi + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \phi) = 0 \quad (\text{P4.3-31})$$

$$m_1 r\dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi = N - m_1 g \sin \alpha \quad (\text{P4.3-32})$$

de la ecuación P4.3-30 podemos escribir que la tensión de la cuerda vale:

$$\mathbf{T} = m_1 (g \cos \alpha - \ddot{r} + r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi) \hat{\mathbf{r}}$$

de donde podemos concluir que la tensión de la cuerda que se une con la masa m_1 ejerce trabajo ya que no es perpendicular al desplazamiento de la partícula. Compruébelo usted mis-

mo haciendo el producto $\mathbf{T} \cdot d\mathbf{r}$ y recuerde que $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$.

Sin embargo, dado que las tensiones en la cuerda para las masas m_1 y m_2 son iguales pero opuestas, se puede comprobar que el trabajo total realizado por la cuerda es cero³, se tiene entonces que: $\Delta E = 0$.

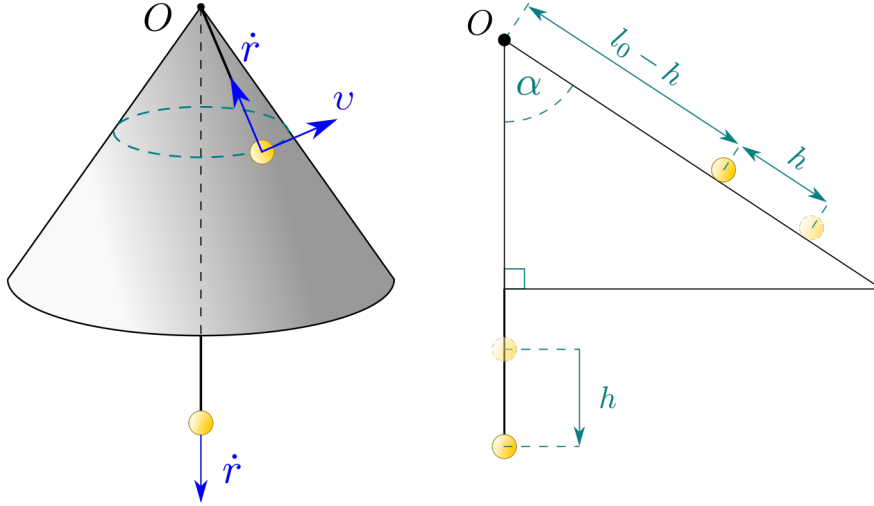


Figura 4.10: Velocidades y desplazamientos de las dos cuentas de masa.

a) La energía en el instante inicial está dada por

$$E_i = \frac{1}{2}m_1v_0^2 - m_1gl_0 \cos \alpha$$

la energía en el instante final, tal y como se muestra en la Figura 4.10, está dada por

$$E_f = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + v^2) - m_1g(l_0 - h) \cos \alpha + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 - m_2gh$$

la pregunta que surge aquí es ¿cómo determinamos v ? Para responder esto podemos hacer uso de la ecuación P4.3-31, donde notamos que esta ecuación se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = rv_\theta = \text{cte.} \quad (\text{P4.3-33})$$

³El trabajo realizado por la tensión de la cuerda sobre la masa m_1 es compensado por el trabajo realizado sobre la masa m_2 , y viceversa.

La ecuación anterior nos indica que la magnitud del momento angular de la masa m_2 con respecto al vértice del cono no cambia⁴. Efectivamente se tiene:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{H}_O = r\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta} \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

por lo tanto

$$\mathbf{H}_O = r^2 \dot{\theta} \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \Rightarrow H_0 = r^2 \dot{\theta} \cos \phi$$

El resultado P4.3-33 nos permite establecer para el instante inicial y final:

$$l_0 v_0 = (l_0 - h) v \Rightarrow v = \left(\frac{l_0}{l_0 - h} \right) v_0$$

por último, usando la ley de conservación de energía mecánica, $\Delta E = 0$, se tiene

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(1 - \left(\frac{l_0}{l_0 - h} \right)^2 \right) + (m_2 - m_1 \cos \alpha) gh$$

de donde podemos despejar $\dot{r}$, que es la velocidad de la masa m_2 cuando ha descendido una distancia h

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{m_1 v_0^2 \left(1 - \left(\frac{l_0}{l_0 - h} \right)^2 \right) + 2 (m_2 - m_1 \cos \alpha) gh}{m_1 + m_2}}$$

Para demostrar que se cumple $\sum \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, primero determinemos el momento angular de la masa m_1 con respecto al punto O , esto es

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times (m_1 r \dot{\theta} \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + m_1 \dot{r} \hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m_1 r \dot{\theta} \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r} \times m_1 \dot{r} \hat{\mathbf{r}}$$

notemos que el producto $\mathbf{r} \times m_1 \dot{r} \hat{\mathbf{r}}$, ya que, son vectores colineales, por tanto se tiene

$$\mathbf{H}_O = m_1 r^2 \dot{\theta} \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

⁴Esto no implica que el momento angular no cambie como se comprueba en la siguiente pregunta de este problema

y ahora derivando con respecto al tiempo⁵

$$\dot{\mathbf{H}}_O = m_1 \left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} \right) \cos \phi \hat{\phi} + m_1 r^2 \dot{\theta} \cos \phi \left(\dot{\phi} \hat{r} + \dot{\theta} \sin \phi \hat{\theta} \right)$$

de donde podemos notar, a partir de la ecuación P4.3-31, que el primer término del lado derecho es igual a cero, por lo tanto se tiene

$$\dot{\mathbf{H}}_O = m_1 r^2 \dot{\theta}^2 \cos \phi \sin \phi \hat{\theta} \quad (\text{P4.3-34})$$

Determinemos a continuación el momento que la fuerza neta que actúa sobre m_1 produce respecto del punto O , esto es:

$$\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times (\mathbf{T} + \mathbf{N} + m_1 \mathbf{g})$$

en donde: $\mathbf{r} \times \mathbf{T} = r \hat{r} \times T \hat{r} = 0$, además: $\mathbf{N} = N \hat{\phi}$ y $m_1 \mathbf{g} = m_1 g \cos \alpha \hat{r} - m_1 g \sin \alpha \hat{\phi}$, en consecuencia se obtiene que:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_O &= r \hat{r} \times (N \hat{\phi} + m_1 g \cos \alpha \hat{r} - m_1 g \sin \alpha \hat{\phi}) \\ \sum \mathbf{M}_O &= r (N - m_1 g \sin \alpha) \hat{\theta} \end{aligned}$$

de la ecuación P4.3-32 se tiene, $N - m_1 g \sin \alpha = m_1 r \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi$, por lo tanto

$$\sum \mathbf{M}_O = m_1 r^2 \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi \hat{\theta} \quad (\text{P4.3-35})$$

comparando los resultados P4.3-34 y P4.3-35 concluimos:

$$\sum \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$$

⁵Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt}|A| \neq \left| \frac{d}{dt}A \right|$.

Problema 4.3

Considere el sistema mostrado en la Figura 4.11. En el instante inicial se deja caer la masa m desde el extremo superior izquierdo. Considere que la longitud natural del resorte de la izquierda es nula, mientras que la longitud natural del resorte de la derecha es igual a R , y ambos poseen rigidez igual a k .

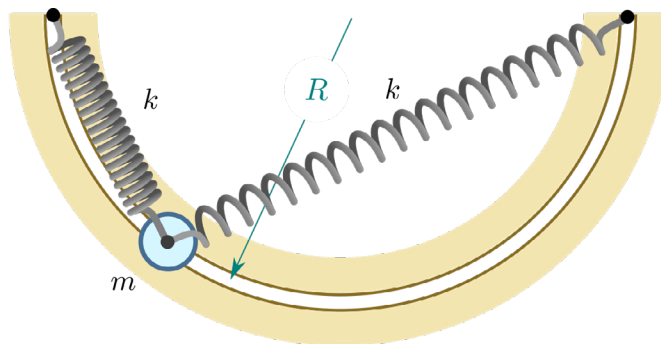


Figura 4.10: Velocidades y desplazamientos de las dos cuentas de masa.

- Encuentre la rapidez de la masa cuando llega al punto más bajo de su trayectoria. ¿Qué condiciones deben satisfacerse para que la masa alcance dicha posición?
- Suponga ahora que la rigidez de los resortes es tal que bajo la condición de la pregunta anterior la masa alcanza justo a llegar con velocidad nula al punto más bajo de su trayectoria. ¿Con qué velocidad inicial debe ser lanzada la masa para que esta llegue ahora con una velocidad de 4 m/s al punto más bajo?

Considere $m = 80 \text{ kg}$ y $R = 3\text{m}$.

Solución 4.2

- La energía del sistema en el instante inicial es

$$E_i = \frac{1}{2}k(2R - R)^2 + mgR = \frac{1}{2}kR^2 + mgR$$

mientras que la energía del sistema cuando la masa se encuentra en el punto más bajo de su trayectoria es

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(R\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}k(R\sqrt{2} - R)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + kR^2\left(\frac{5}{2} - \sqrt{2}\right)$$

por tanto, usando la ley de conservación de energía mecánica, $\Delta E = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kR^2 + mgR &= \frac{1}{2}mv^2 + kR^2\left(\frac{5}{2} - \sqrt{2}\right) \\ v &= \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgR + kR^2(\sqrt{2} - 2)\right)} \end{aligned}$$

para que la masa llegue al punto más bajo de su trayectoria se debe cumplir que $v \geq 0$, de donde podemos determinar la rigidez de los resortes

$$k \geq \frac{mg}{R(2 - \sqrt{2})}$$

b) Para determinar la velocidad inicial de la masa, podemos imponer que $v = 0$, o en otras palabras

$$k = \frac{mg}{R(2 - \sqrt{2})} = 446,58 \text{ N/m}$$

ahora podemos determinar la energía del sistema en el instante inicial

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kR^2 + mgR$$

donde v_0 es la velocidad inicial que queremos determinar, luego, la energía en el instante final es

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(R\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}k(R\sqrt{2} - R)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + kR^2\left(\frac{5}{2} - \sqrt{2}\right)$$

donde $v = 4 \text{ m/s}$. Finalmente, usando la ley de conservación de energía mecánica, $\Delta E = 0$, se tiene

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kR^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + kR^2 \left(\frac{5}{2} - \sqrt{2} \right)$$

y despejando v_0 y evaluando numéricamente se obtiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left(mv^2 + 2kR^2 (2 - \sqrt{2}) - 2mgR \right)} = 4 \text{ m/s}$$

Problema 4.5

La masa m es capaz de deslizar a lo largo de una guía horizontal como se indica en la Figura 4.12. Adicionalmente la masa se conecta a un sistema articulado de barras de masa despreciable, las que se unen a un resorte de rigidez k , como se indica. En el instante inicial el objeto se encuentra justo sobre el apoyo articulado O , y el resorte se encuentra en su longitud natural. Si se le imprime una velocidad inicial v_0 a la masa, determine

- Despreciando toda fricción, determine el máximo desplazamiento horizontal de la masa.
- Asuma ahora que el coeficiente de fricción entre la masa y la guía horizontal es μ . Establezca una condición para el máximo desplazamiento de la masa m .

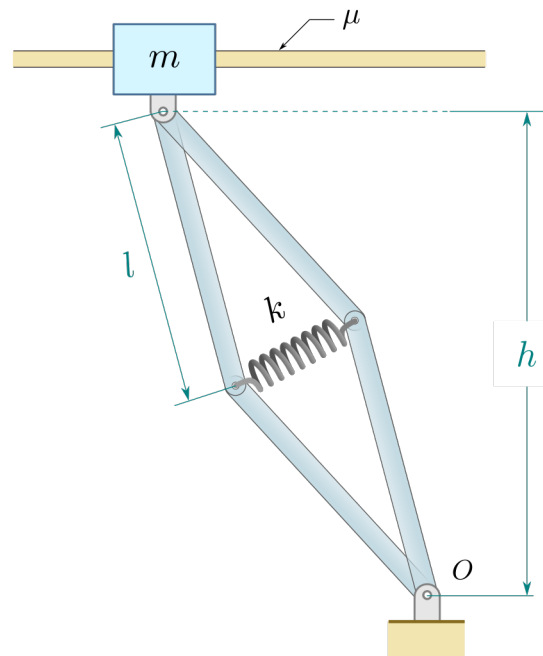


Figura 4.12: Problema 4.5.

Problema 4.5

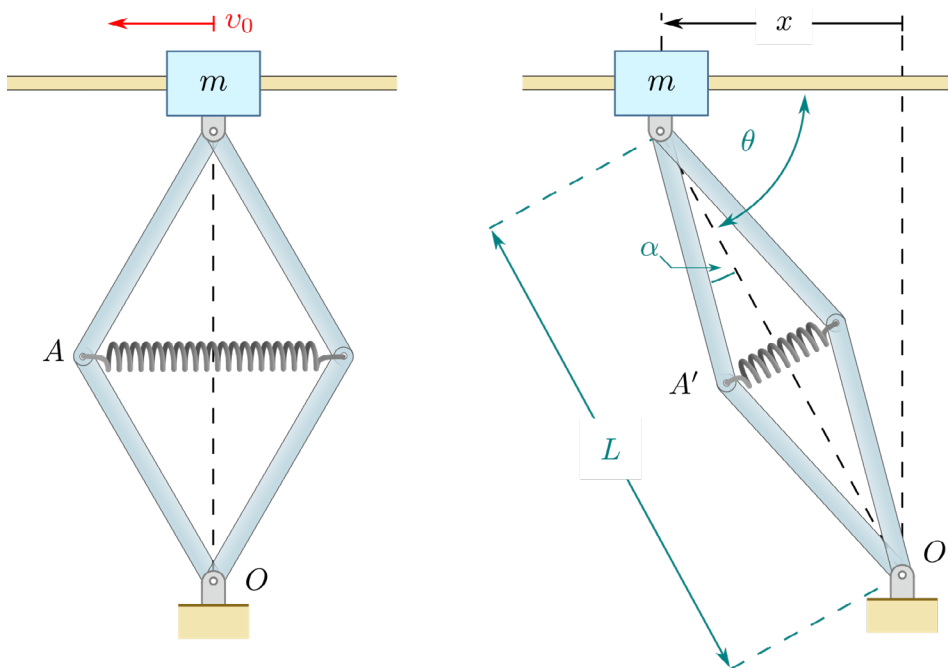


Figura 4.13: Instante inicial y final del problema 4.5.

a) Determinemos la energía mecánica del sistema. Primero determinemos la longitud del resorte en el instante inicial, de acuerdo a la Figura 4.13 tenemos

$$L_0 = \sqrt{4l^2 - h^2}$$

La energía en el instante inicial es:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Para el instante final se tiene que $L = \sqrt{x^2 + h^2}$, por tanto la longitud deformada del resorte se puede determinar como

$$L_f = \sqrt{4l^2 - (x^2 + h^2)} = \sqrt{L_0^2 - x^2}$$

entonces la energía en el instante final es

$$E_f = \frac{1}{2}k(L_f - L_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{L_0^2 - x^2} - L_0\right)^2$$

usando la ley de conservación de energía mecánica, $\Delta E = 0$, se tiene

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{L_0^2 - x^2} - L_0\right)^2$$

al despejar⁶ el máximo desplazamiento horizontal de la masa se obtiene como

$$x = \sqrt{L_0^2 - \left(L_0 \pm \frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

donde $\omega_n^2 = k/m$, al escoger la solución positiva se obtiene que $x \notin \mathbb{R}$, por otro lado si se escoge la solución negativa se tiene

$$x = \sqrt{\frac{v_0}{\omega_n} \left(2L_0 - \frac{v_0}{\omega_n}\right)}$$

b) Ahora si consideramos el roce entre la masa y la guía horizontal, y en base a la Figura 4.14, podemos notar del diagrama de cuerpo libre para la masa:

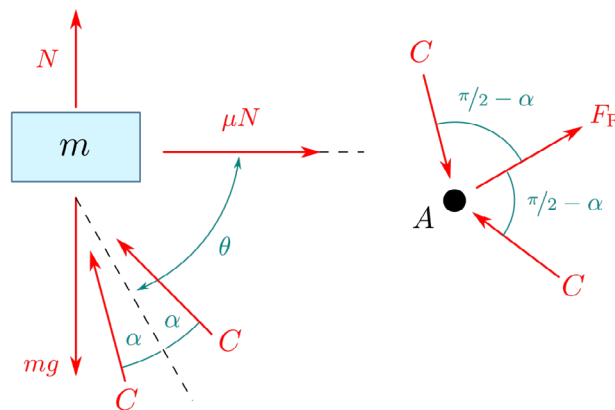


Figura 4.14: Diagrama de cuerpo libre para la masa. Se indican a la derecha las fuerzas que actúan sobre el nodo A de la estructura reticular.

⁶Recordando que $\sqrt{A^2} = |A|$.

$$N = mg - 2C \sin \theta \cos \alpha \quad (\text{P4.3-36})$$

en donde C es la fuerza de compresión de las barras del reticulado y F_R la fuerza en el resorte. Las fuerzas C y F_R se determinan a partir del diagrama de cuerpo libre del punto A , mostrado en la Figura 4.14. Como A no posee masa concluimos que:

$$F_R = 2C \sin \alpha$$

entonces

$$C = \frac{F_R}{2 \sin \alpha} = \frac{k (L_f - L_0)}{2 \sin \alpha}$$

de la geometría del problema, se tiene que $\sin \alpha = L_f/2l$, por tanto:

$$C = kl \left(1 - \frac{L_0}{L_f} \right)$$

Podemos también establecer las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}} \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{2l} \end{aligned} \right\}$$

volviendo a la ecuación P4.5-36 y reemplazando se tiene

$$N = mg - kh \left(1 - \frac{L_0}{L_f} \right)$$

vluego el trabajo ejercido por la fricción es $dW_{nc} = \mu N dx$, por tanto

$$W_{nc} = \int_0^x \mu \left(mg - kh \left(1 - \frac{L_0}{L_f} \right) \right) dx = \mu (mg - kh) x + \mu kh L_0 \arcsin \left(\frac{x}{L_0} \right)$$

y finalmente aplicando $\Delta E = W_{nc}$ obtenemos una expresión para determinar el máximo desplazamiento horizontal de la masa

$$\frac{1}{2} k \left(\sqrt{L_0^2 - x^2} - L_0 \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \mu (mg - kh) x + \mu kh L_0 \arcsin \left(\frac{x}{L_0} \right)$$

Problema 4.6

Una cuenta de masa m puede deslizarse sin fricción a lo largo de una varilla horizontal, la que unida a su vez a una varilla vertical, gira con velocidad angular constante ω . La cuenta se encuentra conectada por medio de dos cuerdas elásticas de rigideces k_1 y k_2 , y de longitud natural nula como se indica en la figura. En el instante inicial la cuenta se ubica justo en el comienzo de la varilla horizontal, y se le imprime una pequeña perturbación. Muestre que para que la cuenta se deslice a lo largo de la varilla horizontal debe cumplirse que: $k_1 + k_2 < m\omega^2$. Bajo la condición anterior, determine la rapidez con la que la cuenta se moverá a lo largo de la varilla cuando esta última ha recorrido una distancia igual a $2d$.

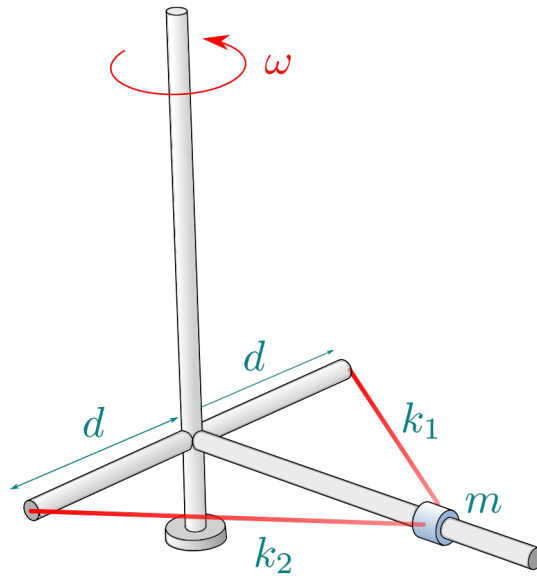


Figura 4.15: Problema 4.6.

Solución 4.6

En referencia a la figura, y usando la segunda ley de Newton en coordenadas cilíndricas se tiene que:

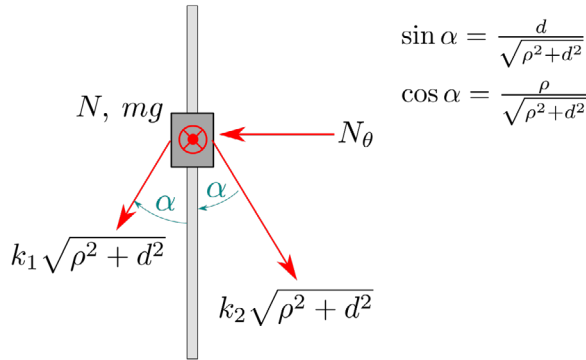


Figura 4.16: Diagrama de cuerpo libre de la cuenta.

$$-(k_1 + k_2) \rho = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) \quad (\text{P4.6-37})$$

$$N_\theta - (k_1 + k_2) d = 2m\dot{\rho}\omega \quad (\text{P4.6-38})$$

$$N - mg = 0 \quad (\text{P4.6-39})$$

Usemos a continuación el teorema de trabajo energía. Para ello notamos que la variación de la energía cinética de la cuenta vale:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2)$$

Por otro lado, a partir del diagrama de cuerpo libre de la cuenta, podemos obtener la fuerza neta que actúa sobre esta última como sigue:

$$-(k_1 + k_2) \rho \hat{\rho} + [N_\theta - (k_1 + k_2) d] \hat{\theta}$$

El desplazamiento infinitesimal de la cuenta se puede determinar como: $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v} \Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, es decir:

$$d\mathbf{r} = \dot{\rho} dt \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} dt \hat{\theta}$$

el trabajo elemental realizado por la fuerza neta es por tanto:

$$dW = -(k_1 + k_2) \rho \dot{\rho} dt + [N_\theta - (k_1 + k_2) d] \rho \dot{\theta} dt$$

usando la ecuación P4.6-38, y reconociendo que $d\rho = \dot{\rho} dt$, la expresión anterior puede ser reescrita como:

$$dW = [2m\omega^2 - (k_1 + k_2)] \rho d\rho$$

El trabajo ejercido por la fuerza neta sobre la cuenta se determina entonces como:

$$W = \int_0^{\rho} [2m\omega^2 - (k_1 + k_2)] \rho d\rho = m\omega^2 \rho^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \rho^2$$

La aplicación del teorema trabajo energía conduce a:

$$\frac{1}{2}m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2) + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \rho^2 = m\omega^2 \rho^2 \quad (\text{P4.6-40})$$

Se puede llegar a este ultimo resultado usando a su vez la ley de conservación de energía mecánica. En efecto, la variación de la energía potencial es:

$$\Delta U = \frac{1}{2}k_1 (\rho^2 + d^2) + \frac{1}{2}k_2 (\rho^2 + d^2) - \frac{1}{2}k_1 d^2 - \frac{1}{2}k_2 d^2$$

o bien

$$\Delta U = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \rho^2$$

Las fuerzas no conservativas que ejercen trabajo en el sistema corresponden a la fuerza normal N_θ y la componente transversal de la fuerza de las cuerdas elásticas⁷, es decir: $[N_\theta - (k_1 + k_2) d] \hat{\theta}$. El trabajo realizado por estas ultimas se puede obtener de la manera indicada anteriormente, con lo que obtenemos:

$$W_{nc} = m\omega^2 \rho^2$$

⁷Esta componente no puede ser considerada como una fuerza conservativa derivable de un potencial, aunque sea una componente de las fuerzas elásticas de las cuerdas. Esto porque dicha componente posee magnitud constante y su dirección siempre coincide con la de $\hat{\theta}$, por lo que el trabajo que efectúa depende de la trayectoria que sigue la cuenta.

Usando ahora: $\Delta E = W_{nc}$, llegamos a la ecuación P4.6-40. Otra manera de obtener el mismo resultado es integrando la ecuación P4.6-37. Primero notemos que: $\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\rho} \dot{\rho}$, usando este ultimo resultado podemos reescribir la ecuación P4.6-37 como:

$$m \frac{d\dot{\rho}}{d\rho} \dot{\rho} = (m\omega^2 - (k_1 + k_2)) \rho$$

La ecuación diferencial ordinaria anterior es de variables separables, por lo que su integración es sencilla y conduce al siguiente resultado

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = \frac{1}{2} m \rho^2 \omega^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \rho^2$$

sumando el factor $\frac{1}{2} m \rho^2 \omega^2$ a ambos lados de la ecuación anterior, y luego de reordenar términos obtenemos:

$$\frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2) + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \rho^2 = m \omega^2 \rho^2$$

Resultado que nuevamente coincide con el de la ecuación P4.6-40. Si despejamos $\dot{\rho}$ de la ecuación P4.6-40 se obtiene:

$$\dot{\rho} = \rho \sqrt{\frac{m\omega^2 - (k_1 + k_2)}{m}}$$

Para que esta última expresión resulte valida debe cumplirse que:

$$k_1 + k_2 < m\omega^2 \quad (\text{P4.6-41})$$

Si la rigidez combinada de las cuerdas no cumple con esta condición entonces la cuenta no es capaz de dejar el extremo inicial de la varilla horizontal. Por otra parte, si la condición P4.6-41 se cumple, y la cuenta se ubica a una distancia $2d$ se tiene:

$$\dot{\rho} = 2d \sqrt{\frac{m\omega^2 - (k_1 + k_2)}{m}}$$

Que corresponde a la rapidez radial de la cuenta cuando esta última ha recorrido una distancia igual a $2d$.

CAPÍTULO 5

Sistemas de partículas

En los capítulos anteriores estudiamos el comportamiento de objetos que pueden ser idealizados como partículas, esto es, como cuerpos puntuales que no poseen dimensiones físicas. Resulta claro que esta suposición no es aplicable cuando el tamaño del objeto no puede ser despreciado en relación al movimiento que ejecuta. Tal es el caso de un trompo, cuyo movimiento implica giros (precesión y nutación) que dependen entre otros de las dimensiones del mismo. Otros ejemplos constituyen los componentes de sistemas mecánicos o estructurales, nuevamente aquí las dimensiones e estos elementos juegan un rol crucial en el análisis de su movimiento.

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de sistemas de partículas. Los sistemas de partículas pueden a su vez ser clasificados como sistemas discretos y sistemas continuos. En el primer caso, las partículas que componen el sistema se encuentran separadas entre sí, en tanto que en el segundo caso, la separación entre las partículas es muy pequeña y puede ser considerada como nula. En este último grupo se encuentran los objetos tridimensionales, los cuales pueden ser concebidos como el conjunto de un gran número de pequeñas partículas cada una de las cuales, para todo efecto práctico, pueden a su vez ser supuestas como puntuales. Dichas partículas interactúan entre sí y con el ambiente que las rodea de formas muy complicadas, sin embargo, si lo que buscamos es analizar el movimiento del objeto como un todo, estas interacciones resultan irrelevantes. El objetivo de este capítulo es el de extender los resultados obtenidos para el análisis del movimiento de una partícula a un conjunto de ellas, y en consecuencia, posibilitar el análisis de problemas más complejos en los que la idealización de cuerpo puntual deja de ser válida.

5.1. Centro de masa

Consideremos el conjunto de N partículas mostrado a la izquierda en la Figura 5.1. Cada una de las partículas posee masa m_i , y sus ubicaciones quedan definidas por sus respectivos vectores posición $\mathbf{r}_i$. Definimos el centro de masa del sistema (CM más brevemente

te) como el punto en el espacio cuya posición se determina por medio de la siguiente ecuación

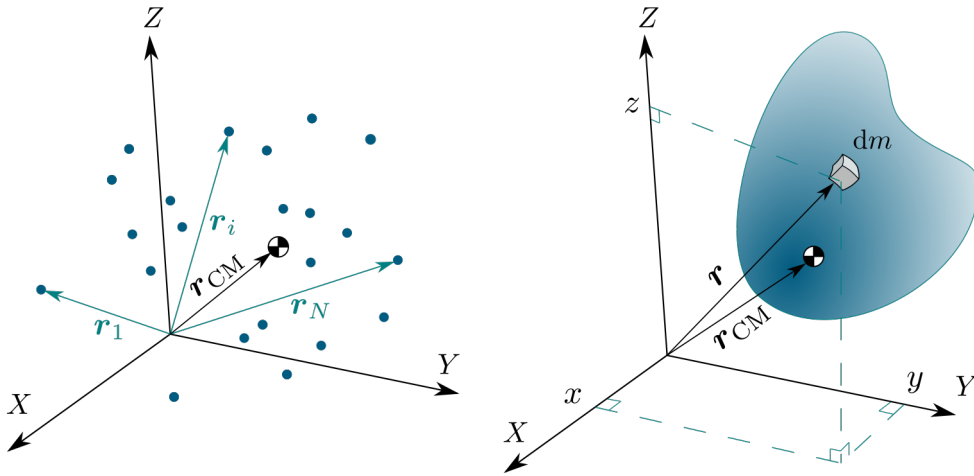


Figura 5.1: Sistema discreto de partículas a la izquierda, y un sistema continuo a la derecha. En el sistema continuo el objeto es subdividido en una serie de pequeñas porciones de masa dm , que pueden ser consideradas como cuerpos puntuales.

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (5.1)$$

donde M es la masa total de las partículas. De la ecuación 5.1 concluimos que el CM corresponde a la ubicación promedio de las masas de las partículas ponderadas por sus respectivas distancias con respecto al origen del sistema de coordenadas.

Si lo que buscamos ahora es encontrar el centro de masa de un objeto tridimensional, podemos proceder como se indica en la Figura 5.1, en donde el objeto puede ser subdividido en un gran número de pequeñas porciones de masa dm . Si la densidad del objeto está dada por ρ , entonces la masa de la porción se puede expresar como $dm = \rho dV$, siendo dV el elemento del volumen. La suma en la ecuación 5.1 se convierte ahora en una integral, y en consecuencia la ubicación del centro de masa se expresa como

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \iiint_V \rho \mathbf{r} dV \quad (5.2)$$

en donde la triple integral tiene como dominio todo el volumen ocupado por el cuerpo. Dependiendo de la simetría del objeto en cuestión, la integral de la ecuación 5.2 puede expresar-

se en coordenadas esféricas, cilíndricas o cualquier otro sistema que nos permita determinar de la manera más directa posible el centro de masa. En coordenadas cartesianas la ecuación 5.2 se expande de la siguiente manera

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho x \, dV \\ y_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho y \, dV \\ z_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho z \, dV \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Como veremos a continuación, el centro de masa juega un rol importante en la descripción del movimiento de cuerpos continuos o sistemas de partículas. Sin embargo, primero es importante discutir la diferencia entre el centro de masa y el centro de gravedad (CG), ya que, con frecuencia se suele hablar indistintamente de estos dos puntos. Recordemos que el CG corresponde a la ubicación de la resultante de las fuerzas gravitacionales que actúan sobre un sistema de partículas. En un campo gravitatorio uniforme, el CG y el CM efectivamente coinciden. Esta situación es la que se presenta en la inmensa mayoría de los problemas de ingeniería que ocurren en las cercanías de la superficie terrestre, en donde el campo gravitacional es prácticamente uniforme. Sin embargo, lo anterior no es cierto en el caso de objetos muy grandes. Consideremos por ejemplo nuestro satélite natural, la Luna, cuya cara visible se encuentra más cerca de la Tierra que su cara oculta. Como consecuencia de lo anterior, la intensidad del campo gravitacional en su cara oculta es menor, lo que resulta en que el CG de la Luna se ubica ligeramente hacia nuestro planeta, a diferencia de su CM que se ubica aproximadamente en su centro geométrico.

Volviendo con la ecuación 5.1 y derivando con respecto al tiempo ambos lados obtenemos¹

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (5.4)$$

¹Asumimos aquí que la masa del sistema permanece constante.

Sin embargo, sabemos que $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$, la suma de la ecuación anterior representa, por tanto, la suma de los momentos lineales de todas las partículas del sistema. Llamamos a esta suma $\mathbf{P}$, que corresponde al momento lineal total, de esta manera la ecuación 5.4 queda como

$$M\dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \mathbf{P} \quad (5.5)$$

volviendo a derivar con respecto al tiempo obtenemos

$$M\ddot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \dot{\mathbf{P}} \quad (5.6)$$

la derivada del momento total del sistema equivale a la fuerza total que actúa sobre el mismo, es decir, $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}}$

$$M\ddot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \mathbf{F} \quad (5.7)$$

En la ecuación 5.7 la fuerza total se puede descomponer en las fuerzas externas que actúan sobre las partículas, y las fuerzas internas que las partículas ejercen entre sí. Para un total de N partículas, existirán, en general, N fuerzas externas actuando sobre cada una de ellas, las que notamos por $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ con $i = 1 \dots N$. Las fuerzas internas, en tanto, se describen como $\mathbf{F}_{ij}$, que indica la fuerza que actúa sobre la partícula i debido a la partícula j . Todo lo anterior queda resumido en la Figura 5.2, en donde, y por simplicidad, se muestran solo tres partículas del total con sus respectivas fuerzas externas e internas.

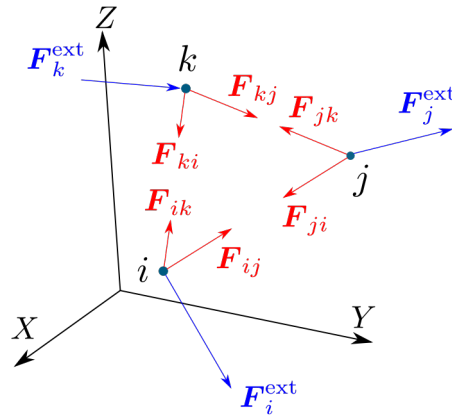


Figura 5.2: Fuerzas externas y fuerzas internas actuando sobre tres partículas.

La fuerza total puede ser escrita de la siguiente manera

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (5.8)$$

En la doble suma del lado derecho de la ecuación anterior, el índice j va desde 1 hasta N , pero no puede ser igual a i , ya que, en caso contrario estaríamos incluyendo la fuerza interna que la partícula i ejerce sobre sí misma, la cual claramente no existe. Recordemos también que, en virtud de la tercera ley de Newton, se cumple que $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. La doble suma puede, por tanto, ser convenientemente visualizada como la suma de todos los elementos de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} & \cdots & \mathbf{F}_{1N} \\ -\mathbf{F}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{23} & \cdots & \mathbf{F}_{2N} \\ -\mathbf{F}_{13} & -\mathbf{F}_{23} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{F}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{F}_{1N} & -\mathbf{F}_{2N} & -\mathbf{F}_{3N} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Analizando la matriz de la ecuación 5.9 queda claro que la suma de todos sus elementos es cero. Esto implica que la fuerza total es igual solo a la suma de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas, ya que las fuerzas internas se anulan entre sí². En consecuencia, podemos reescribir la ecuación 5.7 como sigue

$$M\ddot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (5.10)$$

siendo $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ la suma de las fuerza externas que actúan sobre las partículas del sistema. La ecuación 5.10 nos permite aplicar los resultados del análisis de movimiento de partículas al de sistemas de partículas o cuerpos continuos. Más específicamente, extiende el alcance de la segunda ley de Newton a cuerpos u objetos físicos, en donde ahora la fuerza total corresponde a la suma de las fuerzas externas, y el objeto queda reducido a una partícula cuya masa equivale a su masa total y su ubicación al centro de masa del objeto³. Para ilustrar la importancia de la ecuación 5.10, en la Figura 5.3 se muestra el lanzamiento de un objeto deformable. El objeto se compone de dos esferas de acero unidas por medio de un resorte helicoidal. La masa de las esferas de acero es considerablemente mayor que la masa del resorte, por lo que el CM del objeto se puede ubicar aproximadamente en el punto medio de la línea que une los centros de las esferas. Note como el CM describe una trayectoria parabólica, sin

²El hecho que la suma de las fuerzas internas sea cero, constituye otra manera de enunciar la tercera ley de Newton.

³En efecto, ya habíamos hecho uso implícitamente de este resultado cuando en el capítulo 3 estudiamos el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

importar que distintas partes del objeto describan movimientos complejos. El movimiento del CM coincide con la trayectoria descrita por el movimiento de un proyectil en un campo gravitatorio uniforme tal y como se desprende de la ecuación 5.10.

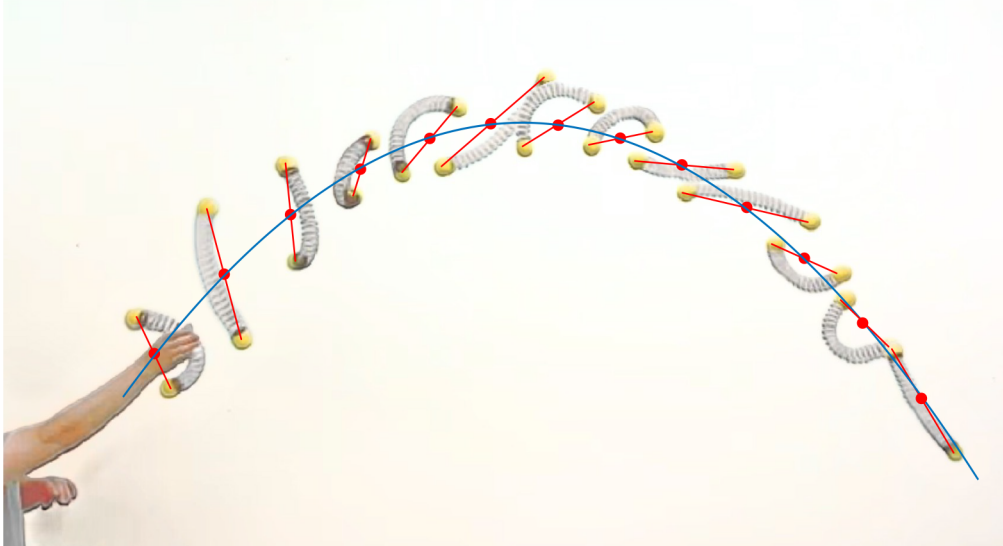


Figura 5.3: Lanzamiento de un objeto deformable en el aire. El objeto se compone de dos esferas pesadas de acero unidas por un resorte helicoidal liviano. Se advierte que el CM, punto rojo en la figura, describe un arco parabólico, tal y como lo haría una partícula en lanzamiento libre (fotografía del autor).

5.2. Momento angular de un sistema de partículas

Para un sistema de N partículas el momento angular total corresponde a la suma de los momentos angulares de cada una de sus partículas, es decir

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (5.11)$$

Analicemos como varía el momento angular total del sistema. Derivamos para ello con respecto al tiempo la ecuación 5.11

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \quad (5.12)$$

El primer término de la suma de la ecuación 5.12 se anula ya que el producto cruz de dos vectores colineales es cero. Por otra parte, y según la segunda ley de Newton, el término $m_i \mathbf{a}_i$ corresponde a la fuerza total que actúa sobre la partícula i , por tanto obtenemos:

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (5.13)$$

La ecuación 5.13 nos indica que la variación del momento angular total es igual al momento neto ejercido por todas las partículas del sistema. Tal y como hicimos en la sección anterior, podemos separar la fuerza total que actúa sobre la partícula i como la suma de las fuerzas externas y las fuerzas internas que el resto de las partículas ejercen sobre ella

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (5.14)$$

reemplazando la ecuación 5.14 en la ecuación 5.13

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \quad (5.15)$$

nuevamente, resulta conveniente visualizar la doble suma de la ecuación 5.15 como la suma de todos los elementos de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{13} & \cdots & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1N} \\ -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{23} & \cdots & \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2N} \\ -\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{13} & -\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{23} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{1N} & -\mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{2N} & -\mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{3N} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

La suma de los elementos de la matriz puede ser agrupada como la suma de los términos $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}$, $\forall i, j, i \neq j$. Cada uno de estos términos resultan, a su vez, ser iguales a cero. Lo anterior queda demostrado en la Figura 5.4 en donde se puede notar que los vectores $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ y $\mathbf{F}_{ij}$ son colineales, y por tanto, su producto vectorial es nulo.

Concluimos, en definitiva, que la variación del momento angular total es igual al momento que ejercen las fuerzas externas sobre el sistema, es decir

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}^{\text{ext}} \quad (5.17)$$

Un caso particular importante surge al considerar la rotación plana de un cuerpo rígido bidimensional (tal como una placa rígida). Como se indica en la Figura 5.5, podemos subdividir el cuerpo en pequeñas porciones, cada una de las cuales tiene un momento angular igual a $dh = \rho^2 \dot{\theta} dm$. La magnitud del momento angular total del cuerpo corresponde, por tanto

$$H = \dot{\theta} \iint_A \rho^2 dm \quad (5.18)$$

El resultado de la ecuación 5.18 puede ser extendido para cuerpos tridimensionales (en este caso la doble integral se convierte en una triple integral) siempre y cuando estos sean simétricos y ejecuten movimientos en un plano. Si estas condiciones no se cumplen, es necesario introducir el concepto de productos de inercia y tensor de inercia, los que quedan fuera del alcance de este apunte. Si derivamos con respecto al tiempo la ecuación 5.18, obtenemos:

$$M_O = I_O \ddot{\theta} \quad (5.19)$$

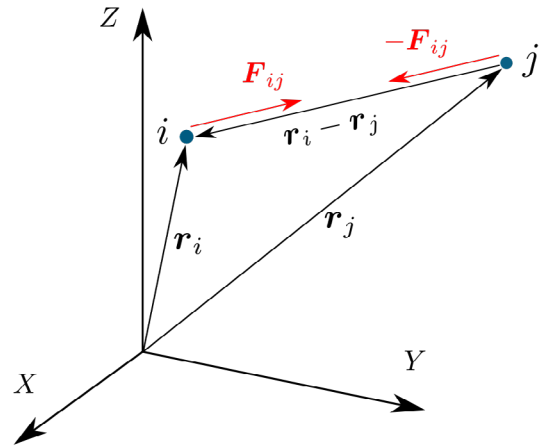


Figura 5.4: Las fuerzas internas entre dos partículas y su vector de posición relativo son colineales.

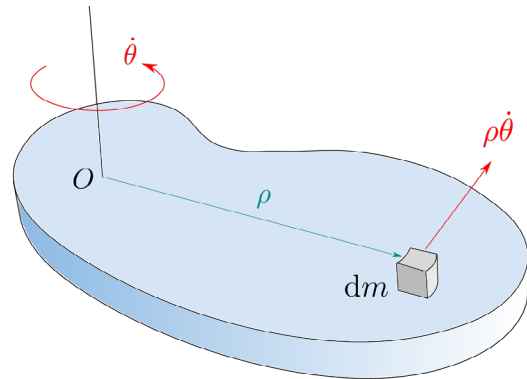


Figura 5.5: Obtención del momento angular de un cuerpo rígido bidimensional.

donde $I_O = \iint_{\mathcal{A}} \rho^2 dm$ es el momento de inercia de la placa con respecto al eje de giro que pasa por el punto O , y M_O el momento total causado por las fuerzas externas sobre el punto O . La ecuación 5.19 juega el rol de la segunda ley de Newton rotacional para cuerpos planos. Si el momento O es nulo entonces es directo advertir que la velocidad angular del cuerpo debe ser constante.

5.3. Energía cinética de un sistema de partículas

La energía cinética total de un sistema de partículas se determina como la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas que lo constituyen. En la Figura 5.6 se muestra un conjunto de N partículas, junto con dos sistemas de referencia. El sistema XYZ es un sistema de referencia inercial, en tanto que el sistema $X'Y'Z'$ es un sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de masa del sistema y cuya orientación permanece fija. Si $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad del centro de masa respecto del sistema XYZ , y $\mathbf{v}'_i$ es la velocidad de la partícula i referida al sistema $X'Y'Z'$, entonces la velocidad de la partícula i respecto del sistema XYZ es $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i$. Podemos escribir, por tanto, la energía cinética del sistema como

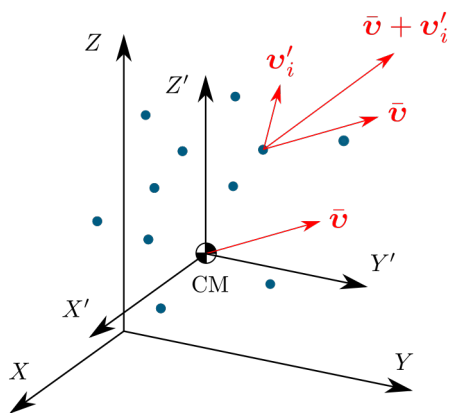


Figura 5.6: Velocidad de una partícula respecto del sistema de referencia inercial XYZ expresada como la suma de la velocidad del CM más la velocidad de la partícula respecto del CM.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i) \quad (5.20)$$

luego de expandir el producto y agrupar términos semejantes, obtenemos

$$T = \frac{1}{2} \bar{v}^2 \sum_{i=1}^N m_i + \bar{\mathbf{v}} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 \quad (5.21)$$

siendo la primera de las sumatorias la masa total del sistema. Si analizamos la ecuación 5.4 notamos que la segunda sumatoria representa el producto de la masa total del sistema por la velocidad del centro de masa respecto del sistema $X'Y'Z'$. Esta velocidad es cero, ya que el sistema $X'Y'Z'$ tiene como origen el centro de masa. Entonces, la ecuación 5.21 queda de la siguiente manera

$$T = \frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 \quad (5.22)$$

La expresión 5.22 nos indica que la energía cinética de un sistema de partículas se puede determinar como la suma de la energía cinética de traslación de una partícula cuya masa equivale a la masa total del sistema y que se mueve con igual velocidad que el centro de masa del sistema, más las energías cinéticas de cada una de las partículas con respecto al centro de masa del sistema. Nuevamente, surge aquí un caso particular importante que corresponde al movimiento en el plano de un cuerpo rígido. Para determinar la energía cinética de un objeto de este tipo primero debemos ser capaces de describir el movimiento de esta clase de cuerpos. Analizaremos esta clase de movimientos en la siguiente sección.

5.4. Cinemática plana de cuerpos rígidos

La ecuación 5.22 puede ser utilizada para determinar la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano. Antes, sin embargo, debemos ser capaces de describir el movimiento de las partículas que componen el cuerpo. Para comenzar, consideremos el movimiento plano de un cuerpo rígido arbitrario como el que se muestra en la Figura 5.7. Sean P y Q la ubicación de dos puntos cualesquiera del cuerpo rígido en el instante de tiempo t_0 , y P' y Q' sus respectivas ubicaciones en el instante de tiempo t . Como el cuerpo es indeformable, la distancia relativa entre dos puntos cualesquiera no cambia, es decir

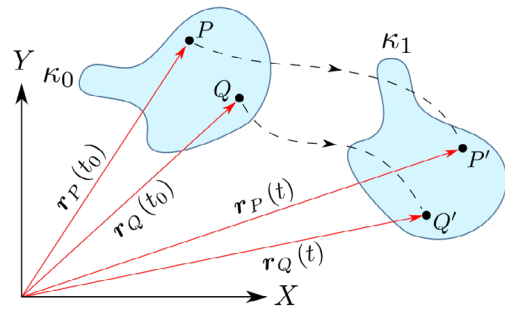


Figura 5.6: Movimiento plano de un cuerpo rígido desde la configuración κ_0 a κ_1 . Se indican los vectores posición de dos puntos P y Q cualesquiera en el cuerpo rígido en los instantes de tiempo t y t_0 . Como el cuerpo es indeformable la distancia y orientación relativa entre dichos puntos permanece constante.

$$|\mathbf{r}_P(t_0) - \mathbf{r}_Q(t_0)| = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q(t)| \quad (5.23)$$

por otra parte también, se cumple que las orientaciones permanecen invariantes, esto es

$$\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q(t) = R(t) (\mathbf{r}_P(t_0) - \mathbf{r}_Q(t_0)) \quad (5.24)$$

donde $R(t)$ es la matriz de rotación en el instante de tiempo t ⁵. La ecuación 5.24 puede ser reescrita como

$$\mathbf{r}_P(t) = R(t) \mathbf{r}_P(t_0) + \mathbf{d} \quad (5.25)$$

donde $\mathbf{d} = \mathbf{r}_Q(t) - R(t) \mathbf{r}_Q(t_0)$. En resumen, la nueva posición de un punto cualquiera del cuerpo rígido, punto P en este caso, corresponde a la suma del desplazamiento $\mathbf{d}$, más una rotación. Concretamente, la ecuación 5.25 nos indica que cuando un cuerpo rígido se somete a un movimiento arbitrario, desde una configuración κ_0 hasta la nueva configuración κ_1 , la nueva configuración se puede obtener como la suma de una traslación rectilínea más una rotación.

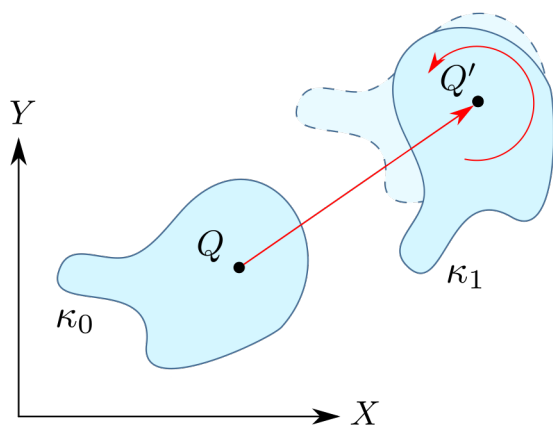


Figura 5.8: El movimiento plano de un cuerpo rígido desde la configuración κ_0 a κ_1 puede descomponerse como una traslación rectilínea más una rotación pura.

Podemos comprobar gráficamente lo anterior si analizamos la Figura 5.8. En efecto, si escogemos un punto Q cualquiera en el cuerpo rígido en la configuración κ_0 , vemos que si primero ejecutamos una traslación rectilínea del objeto llevando el punto Q hasta su posición final Q' , y luego rotamos el objeto con respecto al punto Q' obtendremos la configuración final κ_1 . Una situación interesante ocurre cuando existe algún punto Q ⁶ que no se desplaza cuando el cuerpo ejecuta un movimiento plano. Si esta situación ocurre entonces $\mathbf{r}_Q(t) = \mathbf{r}_Q(t_0) = \mathbf{r}_Q$ y la ecuación 5.24 se reduce en este caso a

$$\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q = R(t) (\mathbf{r}_P(t_0) - \mathbf{r}_Q) \quad (5.26)$$

⁵Recuerde que $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

⁶El punto Q no necesariamente debe corresponder a un punto en el cuerpo rígido, sin embargo, debe estar en reposo con respecto al mismo.

si llamamos $\mathbf{r}'_P(t) = \mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q$ y $\mathbf{r}'_P(t_0) = \mathbf{r}_P(t_0) - \mathbf{r}_Q$ a las posiciones del punto P con respecto al sistema de referencia con origen en Q en los instantes de tiempo t y t_0 respectivamente tenemos:

$$\mathbf{r}'_P(t) = R(t) \mathbf{r}'_P(t_0) \quad (5.27)$$

la ecuación 5.27 establece que cualquier punto en el cuerpo rígido gira con respecto al punto Q siempre y cuando este último permanezca inmóvil. Tal y como se indica en la Figura 5.9 el movimiento resultante del cuerpo corresponde en este caso una rotación pura en torno al punto Q .

Existe una manera adicional de describir el movimiento plano de un cuerpo rígido. Esta descripción indica que si un cuerpo rígido se somete a un movimiento plano infinitesimal siempre existe un punto, denominado centro instantáneo de rotación (CI más brevemente), sobre el cual el cuerpo rígido ejecuta una rotación pura. Para probar esta afirmación usamos el resultado de la ecuación 5.25 el cual puede ser reescrito en términos de las velocidades de los puntos P y Q de la siguiente manera

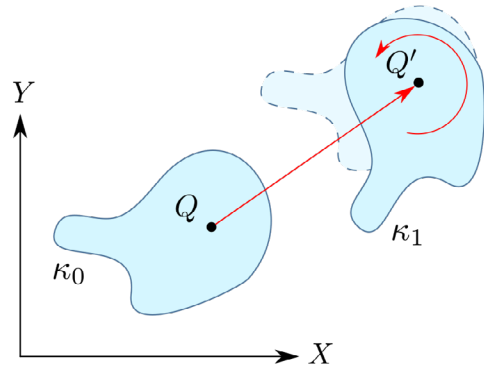


Figura 5.9: Rotación pura de un cuerpo rígido en torno al punto Q .

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \vec{PQ} \quad (5.28)$$

la ecuación 5.28 establece que la velocidad de un punto P en el cuerpo rígido corresponde a la suma de la velocidad del punto Q , lo que implica una traslación rectilínea, más la velocidad transversal de rotación en torno a Q con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}}$. Si efectivamente existe un punto en torno al cual el cuerpo ejecuta una rotación pura, entonces este punto ha de tener velocidad nula. Despejando de la ecuación 5.28 la velocidad de Q e imponiendo la condición anterior tenemos

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \vec{PQ} \quad (5.29)$$

si $\mathbf{v}_P = v_{Px}\hat{\mathbf{i}} + v_{Py}\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{PQ} = \lambda_x\hat{\mathbf{i}} + \lambda_y\hat{\mathbf{j}}$, entonces la ecuación 5.29 indica que

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x &= \frac{v_{Py}}{\omega} \\ \lambda_y &= -\frac{v_{Px}}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

La ecuación 5.30 establece la posición del CI. En la práctica, la determinación del CI resulta más sencilla si conocemos las velocidades de dos puntos en el cuerpo rígido. Efectivamente, tal y como se indica en la Figura 5.10, la ubicación del CI corresponde a la intersección de las líneas perpendiculares a las velocidades de dos puntos del objeto. Si por otra parte, las velocidades de los puntos son paralelas entre sí, entonces dichos puntos se encuentran en la línea que contiene al CI, y por tanto su ubicación se puede obtener directamente a partir de las conocidas reglas de proporcionalidad y semejanza.

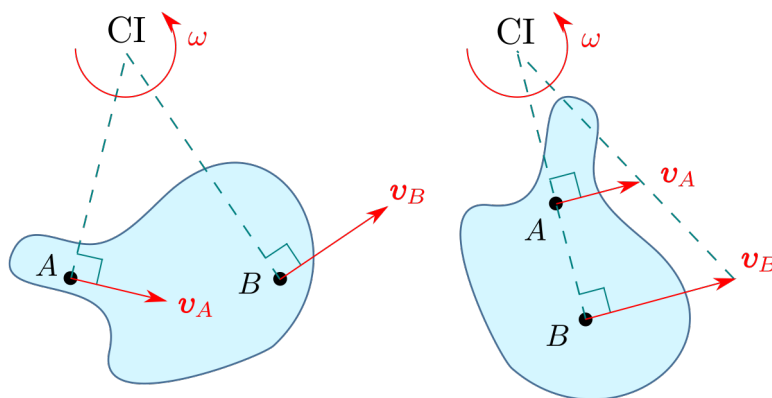


Figura 5.10: Determinación del centro instantáneo de rotación (CI). Si conocemos las velocidades de dos puntos del objeto, el CI puede ser ubicado en la intersección de las perpendiculares, izquierda, o en caso que las perpendiculares coincidan, mediante las reglas de semejanza de triángulos, derecha.

En resumen, podemos decir que el movimiento plano de un cuerpo rígido puede ser concebido, ya sea como la suma de una traslación más una rotación, o bien como una rotación pura en torno al CI.

5.5. Energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano

En virtud de los resultados de la sección anterior, podemos descomponer el movimiento plano de un cuerpo como una traslación de su CM más una rotación respecto del CM. Usando la ecuación 5.22, la energía cinética para un cuerpo rígido en movimiento plano se expresa, por tanto, como sigue

$$T = \frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i r_i'^2 \omega^2 \quad (5.31)$$

en donde $v_i' = r_i' \omega$ es la velocidad de la i -ésima partícula respecto del CM y ω es la velocidad de rotación del CM. La ecuación 5.31 puede ser reescrita como

$$T = \frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 \quad (5.32)$$

siendo I_{CM} el momento de inercia del cuerpo con respecto al centro de masa. Alternativamente, y si conocemos la ubicación del CI, la energía cinética puede determinarse como

$$T = \frac{1}{2}I_{\text{CI}}\omega^2 \quad (5.33)$$

en donde ahora I_{CI} es el momento de inercia del cuerpo con respecto al CI y ω la velocidad de rotación con respecto al centro instantáneo. Las ecuaciones 5.31 y 5.33 entregan resultados equivalentes y su uso dependerá del problema en particular que estemos analizando.

5.6. Problemas capítulo 5

Problema 5.1

El disco de la Figura 5.11 rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal y se encuentra fabricado en aluminio (densidad $\rho = 2\,700\text{ kg/m}^3$), se sabe además que posee un radio $R = 22\text{ cm}$ y un espesor $e = 16\text{ mm}$. Una barra se une como se indica al disco en el punto A por medio de un pivote sin fricción. La barra está fabricada en acero (densidad $\rho = 7\,850\text{ kg/m}^3$) y su sección transversal es rectangular de $55\text{ mm} \times 20\text{ mm}$. En el punto B la barra desliza sin fricción sobre una pared vertical. El sistema se deja caer desde el reposo en la posición mostrada. Encuentre la velocidad angular del disco y la barra cuando esta última forma un ángulo de 30° con respecto a la horizontal.

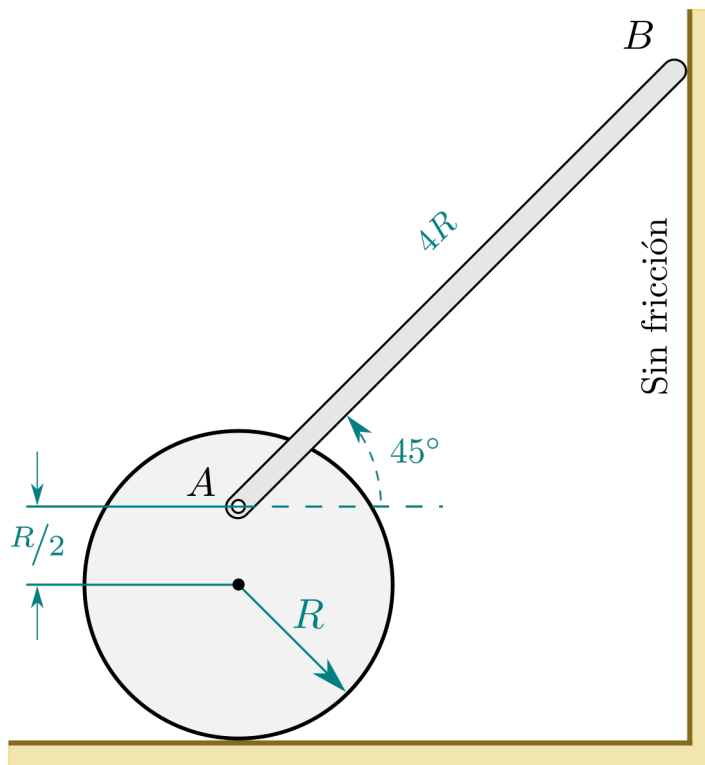


Figura 5.11: Problema 5.1.

Solución 5.1

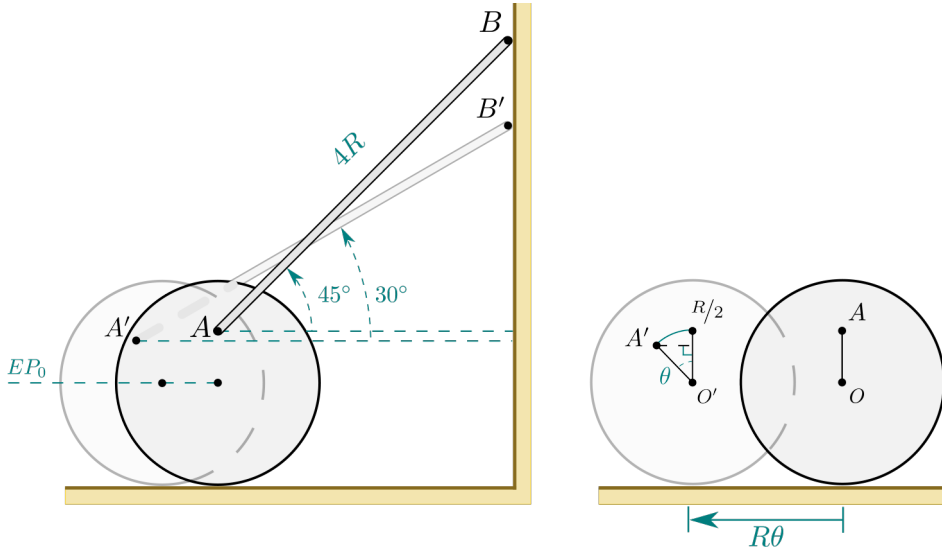


Figura 5.12: Configuración inicial y final del sistema.

En la Figura 5.12 se muestra esquemáticamente la configuración inicial y final del sistema. Tal y como se indica en la Figura 5.12, el disco rueda sin resbalar por lo que el desplazamiento del centro del disco es igual a $R\theta$, de esta forma podemos establecer para el desplazamiento horizontal del punto A , lo siguiente:

$$\frac{R}{2} \sin \theta + R\theta = 4R \frac{\sqrt{3}}{2} - 4R \frac{\sqrt{2}}{2}$$

esta ecuación se puede resolver mediante métodos numéricos o gráficamente para obtener: $\theta = 24,53^\circ$.

Por otro lado el movimiento del disco puede ser descrito como la suma de una traslación más una rotación. Si ω es la velocidad angular de rotación del disco, entonces $v = R\omega$ es su velocidad de traslación. Podemos, por tanto, describir la velocidad de los extremos de la barra como se describe en la Figura 5.13

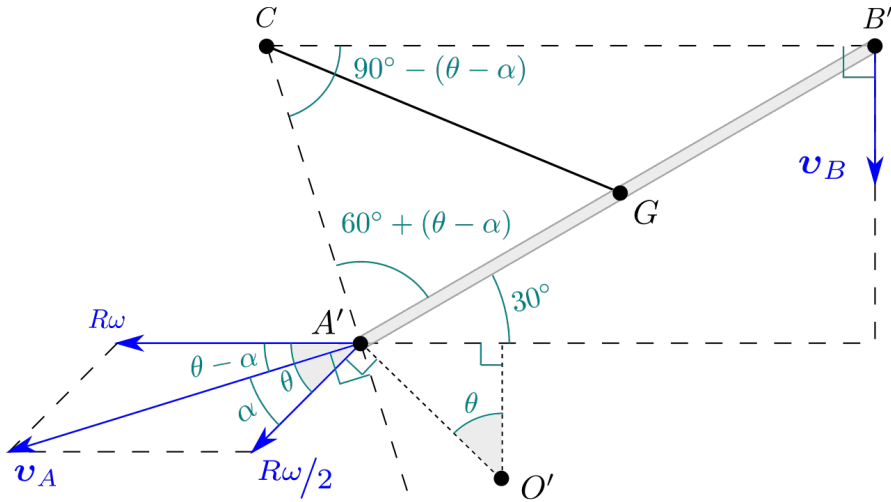


Figura 5.13: Velocidades en los extremos de la barra. El punto C corresponde a su centro instantáneo de rotación, y G a su centro de masa.

Por lo tanto, de la Figura 5.13 tenemos:

$$\frac{\sin \alpha}{R\omega} = \frac{\sin (\theta - \alpha)}{\frac{R}{2}\omega}$$

$$\frac{1}{2} \sin \alpha = \sin (24,53^\circ - \alpha)$$

$$\alpha = 16,41^\circ$$

entonces, $\angle A'CB' = 81,88^\circ$. Ahora del $\triangle A'CB'$ tenemos

$$\frac{\sin 81,88^\circ}{4R} = \frac{\sin 30^\circ}{A'C}$$

$$A'C = 44,45 \text{ cm}$$

por lo tanto

$$CG = \sqrt{44^2 + 44,45^2 - 2 \times 44 \times 44,45 \times \cos 68,12^\circ} \text{ cm} \Rightarrow CG = 49,54 \text{ cm}$$

Para determinar la energía potencial gravitacional, tomamos como nivel de referencia el centro del disco, entonces para la barra tenemos:

$$U_1 = mg \left(\frac{R}{2} + 2R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 31,39 \text{ J}$$

y en el estado final

$$U_2 = mg \left(\frac{R}{2} \cos \theta + R \right) = 23,9 \text{ J}$$

La energía cinética del sistema en el instante inicial es cero. Para determinar la energía cinética en el instante final tenemos que la masa del disco es 6,57 kg y su momento de inercia es 0,159 kg m², entonces

$$T_2 = \frac{1}{2} \times 6,57 \times (R\omega)^2 + \frac{1}{2} \times 0,159 \times \omega^2 + \frac{1}{2} I_{AB} \omega_1^2$$

en donde ω_1 es la velocidad angular de la barra en torno a su centro instantáneo. El momento de inercia de la barra, I_{AB} , con respecto al centro instantáneo de rotación se calcula como:

$$I_{AB} = \frac{1}{12} \times 7,6 \times (0,88)^2 + 7,6 \times (0,495)^2 = 2,352 \text{ kg m}^2$$

por lo tanto

$$T_2 = 0,238\omega^2 + 1,176\omega_1^2$$

además, sabemos que

$$v_A = \sqrt{R^2\omega^2 + \frac{R^2\omega^2}{4} - 2R\omega \frac{R\omega}{2} \cos(180^\circ - \theta)} = 0,323\omega$$

Como el punto A pertenece tanto al disco como a la barra podemos establecer que:

$$0,323\omega = 0,445\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = 0,726\omega$$

entonces

$$31,39 = 23,9 + 0,858\omega^2$$

finalmente se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 2,955 \text{ rad/s} \\ \omega_1 &= 2,145 \text{ rad/s} \end{aligned} \right\}$$

Problema 5.2

Una placa triangular de espesor $e = 28\text{mm}$, $a = 45\text{ cm}$ y densidad $\rho = 7\,850\text{ kg/m}^3$ se conecta por medio de un pasador sin fricción al extremo de una barra uniforme de masa $m = 25\text{ kg}$, la que en su extremo opuesto cuenta de un rodillo que le permite deslizar sin fricción sobre una superficie horizontal. Un resorte de rigidez $k = 4\text{ N/cm}$ y que en la posición mostrada se encuentra sin deformar se conecta a la placa y la barra como se indica en la Figura 5.14. El sistema se deja caer desde el reposo. Determine la rapidez del rodillo en el extremo inferior de la barra y la velocidad angular de la placa, luego de que la placa ha girado 15° .

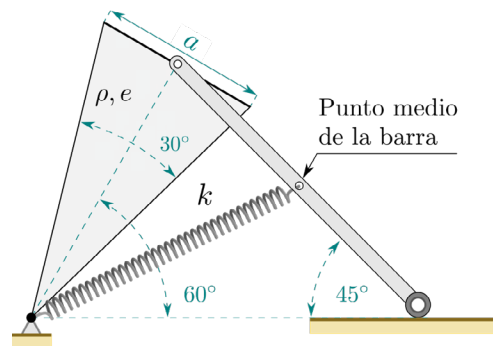


Figura 5.14: Problema 5.2.

Solución 5.2

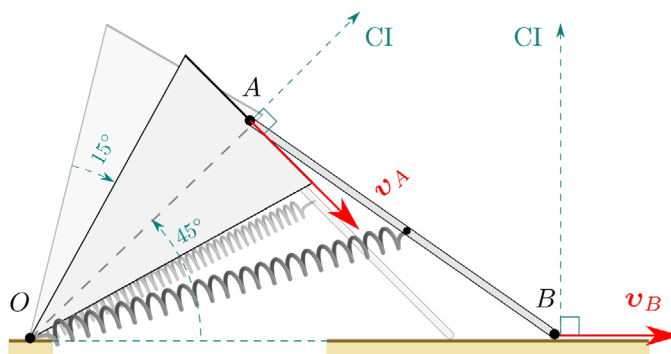


Figura 5.15: Configuración inicial y final del sistema.

En el instante inicial el sistema se deja caer desde el reposo, el resorte no se encuentra deformado y si además escogemos los niveles cero para la energía potencial en los CM, entonces

$$E_i = 0$$

Denominemos l al largo de la barra, en la la Figura 5.15 se muestra la configuración final del sistema de la que se obtiene que: $\angle BOA = 45^\circ$, $OA = (a/2) \cot 15^\circ \approx 1,866a$, entonces del $\triangle OAB$

$$l^2 = (1,866a)^2 + (OB)^2 - 2 \times 1,866a \times OB \times \cos 45^\circ \quad (\text{P5.2-34})$$

en la posición inicial podemos establecer

$$\frac{\sin 45^\circ}{1,866a} = \frac{\sin 60^\circ}{l} \Rightarrow l = 2,285a$$

por lo tanto, reemplazando en la ecuación P5.2-34

$$(OB)^2 - 2,369 \times OB - 1,739 = 0$$

$$\therefore OB = 2,957a$$

entonces la distancia desde B al centro instantáneo de rotación (CI) es igual a $3,185a$ y la distancia del punto A al CI

$$2,957\sqrt{2}a - 1,866a = 1,091a$$

Sea ω_1 la velocidad angular de la placa con respecto al punto O , y ω_2 la velocidad angular de la barra con respecto al CI, con esto, podemos establecer

$$1,866a\omega_1 = 1,091a\omega_2$$

$$\therefore \omega_2 = 1,71\omega_1$$

En el instante final tenemos

$$T_f = \frac{1}{2}I_p\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_{b_{CI}}\omega_2^2$$

donde

$$\left. \begin{aligned} M_p &= \frac{a}{2} \times 1,866a \times \rho e = 41,527 \text{ kg} \\ I_p &= \frac{M_p}{24} \left(12 (1,866a)^2 + a^2 \right) = 14,991 \text{ kg m}^2 \\ I_{bCI} &= \frac{1}{12} m_b l^2 + m_b d^2 \end{aligned} \right\}$$

siendo M_p la masa de la placa, m_b la masa de la barra, y d la distancia del CM de la barra al CI⁷

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{2 (1,091a)^2 + 2 (3,185a)^2 - (2,285a)^2} = 0,94 \text{ m}$$

$$\therefore I_{bCI} = 24,293 \text{ kg m}^2$$

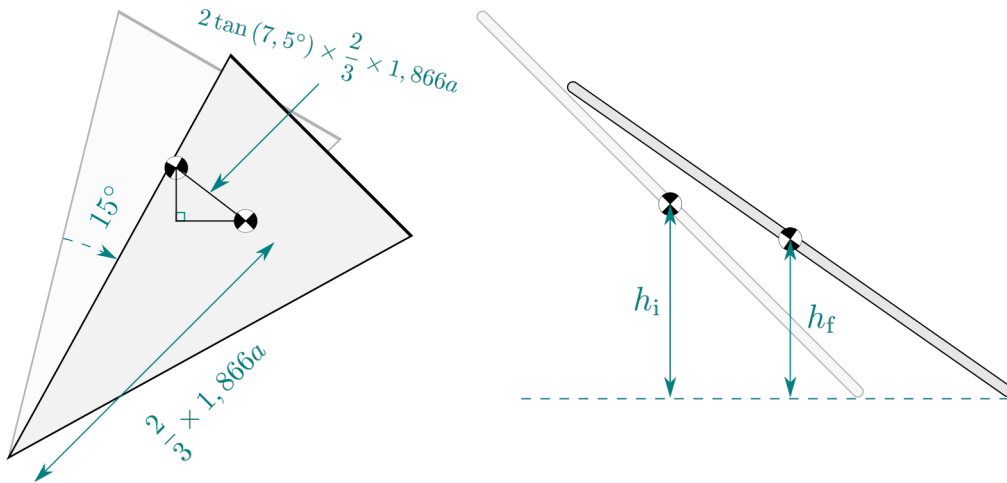


Figura 5.16: Descensos de los centros de masa de cada cuerpo.

Para la variación de energía potencial gravitacional, de la Figura 5.16 vemos que el descenso del CM de la placa es

⁷Puede demostrarse que para un triángulo de lados a, b, c la longitud de la mediana bajada desde el vértice C vale:
 $d = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. Intente demostrarlo!

$$2 \tan 7,5^\circ \times \frac{2}{3} \times 1,866a \times \sin 37,5^\circ = 0,09 \text{ m}$$

para la barra, calculemos las distancias entre el CM, en el instante inicial y final, respecto al punto O :

$$\left. \begin{aligned} d_i &= \frac{1}{2} \sqrt{2(1,866a)^2 + 2(2,549a)^2 - (2,285a)^2} = 0,864 \text{ m} \\ d_f &= \frac{1}{2} \sqrt{2(1,866a)^2 + 2(2,957a)^2 - (2,285a)^2} = 0,987 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

además, es posible establecer:

$$h_i = 0,864 \text{ m} \times 0,421$$

$$h_f = 0,877 \text{ m} \times 0,301$$

$$\therefore \Delta h = -0,1 \text{ m}$$

finalmente tenemos que la variación de la energía potencial gravitacional del sistema es:

$$\Delta U = -41,527 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 0,09 \text{ m} - 25 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 0,1 \text{ m}$$

$$\Delta U = -61,189 \text{ J}$$

Por otro lado, la variación de energía potencial elástica es:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \times 400 \text{ N/m} \times (0,123 \text{ m})^2 = 3,026 \text{ J}$$

Ahora, usando la ley de conservación de energía mecánica:

$$\frac{1}{2} \times 14,991 \times \omega_1^2 + \frac{1}{2} \times 24,293 \times (1,71\omega_1)^2 - 61,189 + 3,026 = 0$$

despejando ω_1 resulta:

$$\omega_1 = 1,163 \text{ rad/s}$$

entonces $\omega_2 = 1,989 \text{ rad/s}$, esto implica que $v_B = 3,185a \times 1,989 \text{ rad/s}$, por lo tanto, la velocidad angular de la placa es $1,627 \text{ rad/s}$ y la rapidez del rodillo: $2,851 \text{ m/s}$.

Problema 5.3

Una placa semicircular perforada de radio $R = 70$ cm, espesor $e = 48$ mm y densidad $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ se conecta por medio de un pasador sin fricción al extremo de una barra uniforme de masa $m = 15$ kg, la que en su extremo opuesto cuenta de un pequeño rodillo que le permite deslizarse sin fricción sobre una ranura vertical. Un resorte de rigidez $k = 115 \text{ N/cm}$ cuya longitud natural es igual a 30 cm se conecta a la placa y la barra como se indica en la Figura 5.17. El sistema se libera desde el reposo. Determine la rapidez del rodillo en el extremo inferior de la barra, y la velocidad angular de la placa, luego que esta última ha girado en 30° .

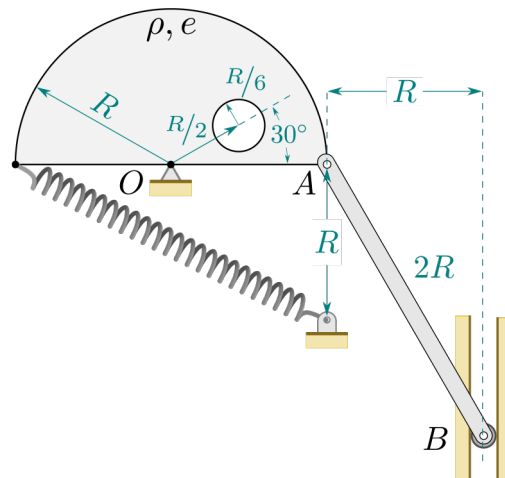


Figura 5.17: Problema 5.3.

Solución 5.3

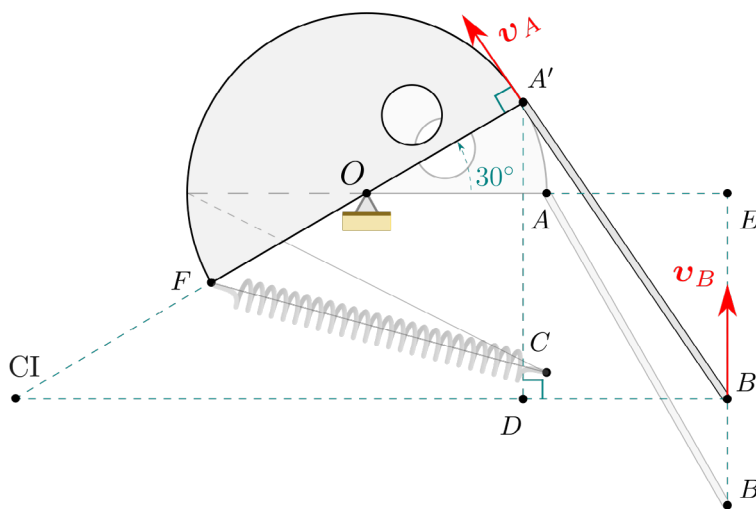


Figura 5.18: Configuración final del sistema y velocidades de los extremos de la barra.

En la Figura 5.18 se muestran las velocidades de los extremos de la barra en el estado final, se pueden obtener las siguientes relaciones $\overline{OE} = 2R$, entonces $\overline{DB'} = 2R - R\sqrt{3}/2$, por otro lado $\overline{A'B'} = \overline{AB} = 2R$, entonces $\angle DB'A' = \arccos\left(\frac{(4-\sqrt{3})}{4}\right) = 55,46^\circ$.

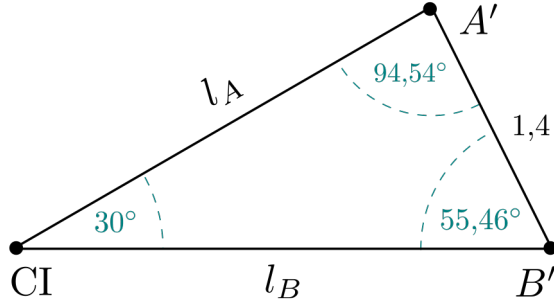


Figura 5.19: Geometría problema 5.3.

Determinemos las distancias de A' y B' al CI de la barra, como se ve en la Figura 5.19 usando el teorema del seno

$$\frac{\sin 30^\circ}{1,4} = \frac{\sin 55,46^\circ}{l_A}$$

$$\therefore l_A = 2,306 \text{ m}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{1,4} = \frac{\sin 94,54^\circ}{l_B}$$

$$\therefore l_B = 2,791 \text{ m}$$

Sea ω_1 la velocidad angular de la placa con respecto al punto O y ω_2 la velocidad angular de la barra con respecto al CI, entonces

$$0,7\omega_1 = 2,306\omega_2$$

$$\therefore \omega_1 = 3,294\omega_2$$

En el instante inicial tenemos la energía potencial elástica del resorte vale:

$$V_i = \frac{1}{2} \times 11500 \text{ N/m} \times (1,565 \text{ m} - 0,3 \text{ m})^2 = 9\,201,294 \text{ J}$$

En el instante final la energía mecánica es

$$E_f = \frac{1}{2} I_{Po} \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{bCI} \omega_2^2 + U_f + V_f$$

donde

$$\left. \begin{aligned} I_{Po} &= \left\{ \frac{1}{4} \pi R^4 - \left[\frac{1}{2} \pi \left(\frac{R}{6} \right)^4 + \pi \left(\frac{R}{6} \right)^2 \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] \right\} \rho e = 23,723 \text{ kg m}^2 \\ I_{bCI} &= \frac{1}{12} m (2R)^2 + md^2 \end{aligned} \right\}$$

siendo d la distancia desde el centro instantáneo de rotación hasta el centro de masa de la barra, entonces

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{2l_A^2 + 2l_B^2 - 4R^2} = 2,462 \text{ m}$$

$$\therefore I_{\text{bCI}} = 93,372 \text{ kg m}^2$$

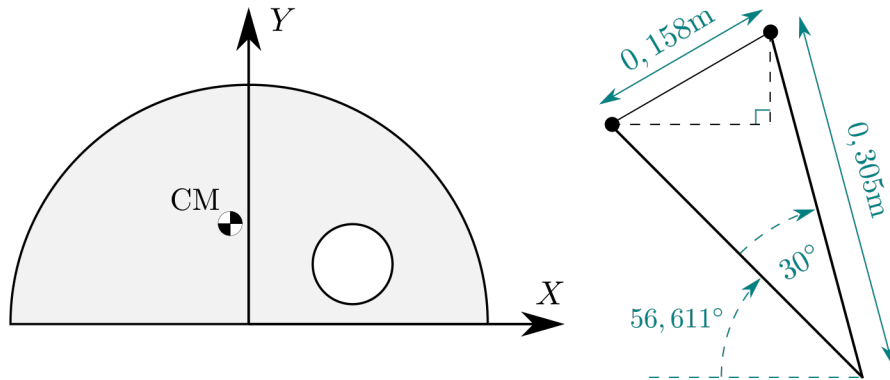


Figura 5.20: Posición del centro de masa de la placa.

Calculemos ahora la variación de las energías potenciales gravitacionales de ambos cuerpos, para la placa como se ve en la Figura 5.20

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{CM}} &= \frac{-\pi \left(\frac{R}{6}\right)^2 \frac{R}{4} \sqrt{3}}{\frac{1}{2}\pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{6}\right)^2} = -0,018 \text{ m} \\ y_{\text{CM}} &= \frac{\frac{1}{2}\pi R^2 \left(\frac{4R}{3\pi}\right) - \pi \left(\frac{R}{6}\right)^2 \frac{R}{4}}{\frac{1}{2}\pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{6}\right)^2} = 0,304 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

la distancia del CM de la placa al punto O es 0,305m por lo tanto, de la Figura 5.20 vemos que el descenso del CM de la placa es $0,158\text{m} \times \sin 18,389^\circ = 0,05\text{m}$ y la masa de la placa es 94,21 kg.

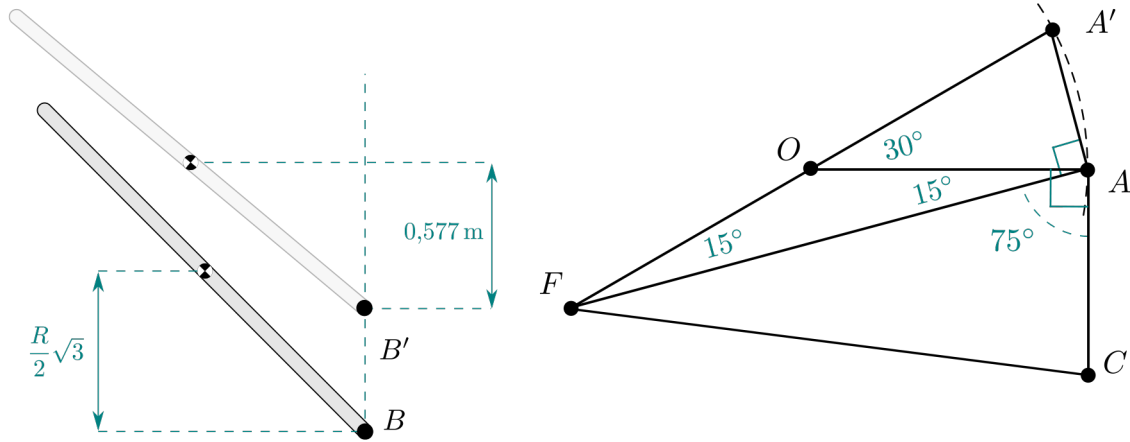


Figura 5.21: A la izquierda el ascenso del centro de masa de la barra. A la derecha se indica la geometría para determinar la energía potencial elástica.

Según la Figura 5.21, para la barra tenemos que el ascenso del CM es $0,577\text{m} - 0,197\text{m} = 0,38\text{m}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta U &= 15\text{ kg} \times 9,81\text{ m/s}^2 \times 0,38\text{ m} - 94,21\text{ kg} \times 9,81\text{ m/s}^2 \times 0,05\text{ m} \\ \Delta U &= 9,707\text{ J}\end{aligned}$$

Para obtener la energía potencial elástica final, de la Figura 5.21 obtenemos: $FA = 2R \cos 15^\circ = 1,352\text{m}$ y también $AC = R = 0,7\text{m}$. Aplicando el teorema del coseno para el $\triangle FAC$ se tiene

$$FC = \sqrt{(0,7)^2 + (1,352)^2 - 2 \times 0,7 \times 1,352 \times \cos 75^\circ} = 1,352\text{ m}$$

por lo tanto, la energía potencial elástica final es:

$$V_f = \frac{1}{2} \times 11\,500\text{ N/m} \times (1,352\text{ m} - 0,3\text{ m})^2 = 6\,363,548\text{ J}$$

entonces la variación de energía potencial elástica es

$$\Delta V = -2\,837,746\text{ J}$$

Finalmente, usando la ley de conservación de energía mecánica

$$\frac{1}{2} \times 23,723 \times \omega_1^2 + \frac{1}{2} \times 93,372 \times \omega_2^2 + 9,707 - 2\,837,746 = 0$$

$$175,388\omega_2^2 = 2\,828,039$$

por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= 4,016 \text{ rad/s} \\ \omega_1 &= 13,227 \text{ rad/s} \end{aligned} \right\}$$

Problema 5.4

El sistema de la Figura 5.22 se compone de una placa de la forma indicada, de espesor $e = 32\text{mm}$, densidad $\rho = 2\,700 \text{ kg/m}^3$ y radio $R = 85 \text{ cm}$ capaz de girar en el punto A , y una barra de masa $m = 25 \text{ kg}$ que en uno de sus extremos posee un pequeño rodillo el que es capaz de deslizarse sin roce sobre la cara curva de la placa. Dos resortes se ubican como se indica. Un resorte vertical de rigidez $k = 12 \text{ N/cm}$ que en la posición mostrada se encuentra sin deformar, y un resorte horizontal que posee longitud natural igual a $R/2$ y rigidez $3k$. Determine las velocidades angulares de la placa y la barra cuando esta última ha girado 20° .

Solución 5.4

Determinemos primero la relación entre la velocidad angular de la barra con

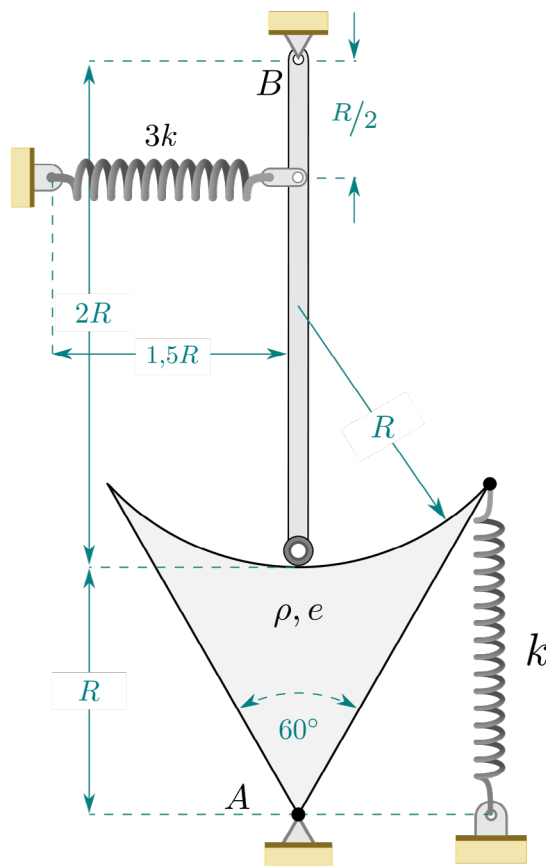


Figura 5.22: Problema 5.4.

respecto al punto B , y la velocidad angular de la placa con respecto al punto A . Usando el sistema indicado en la figura 5.23, para el cual la dirección del eje X coincide con la línea media de la placa en su posición rotada, la ecuación de la cara circular de la placa en coordenadas cartesianas es:

$$(x - 2R)^2 + y^2 = R^2$$

y en coordenadas polares

$$\begin{aligned} (\rho \cos \theta - 2R)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta &= R^2 \\ \therefore \rho^2 - 4R\rho \cos \theta + 3R^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{P5.2-35})$$

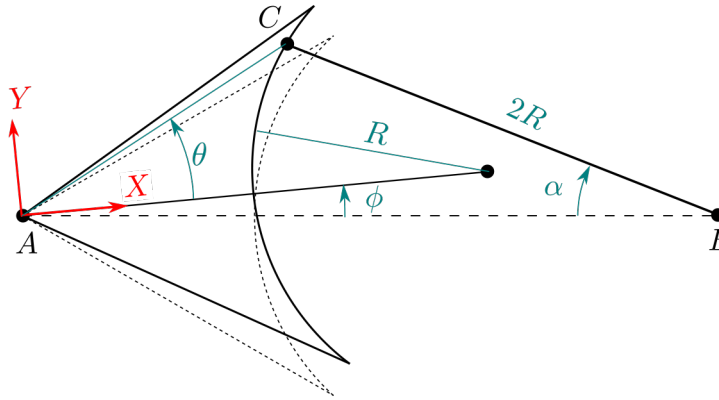


Figura 5.23: Relación entre los ángulos α y ϕ .

En la Figura 5.23 se indican mediante el ángulo α , el giro de la barra BC , en tanto que ϕ corresponde al ángulo de giro de la placa. Para obtener una relación entre los ángulos ϕ y α , procedemos como se describe a continuación. Obtengamos primero la distancia entre el punto de contacto de la barra con la cara circular de la placa, punto C , y el punto A . Dicha distancia puede determinarse a partir del teorema del coseno para el $\triangle ABC$

$$d^2 = (2R)^2 + (3R)^2 - 12R^2 \cos \alpha = R^2 (13 - 12 \cos \alpha) \quad (\text{P5.2-36})$$

Despejando ρ de la ecuación P5.4-35 tenemos:

$$\rho = 2R \cos \theta - R\sqrt{4 \cos^2 \theta - 3} \quad (\text{P5.2-37})$$

igualando las ecuaciones P5.4-36 y P5.4-37, se obtiene:

$$2 \cos \theta - \sqrt{4 \cos^2 \theta - 3} = \sqrt{13 - 12 \cos \alpha} \quad (\text{P5.2-38})$$

la ecuación P5.4-38 nos permite encontrar θ , ángulo que la línea AC forma con el eje X , conocido el valor de α . Ahora bien, el ángulo de giro de la placa ϕ , se puede obtener usando el teorema del seno para el $\triangle ABC$ de la siguiente manera:

$$\frac{\sin(\theta + \phi)}{2R} = \frac{\sin \alpha}{R\sqrt{13 - 12 \cos \alpha}} \Rightarrow \sin(\theta + \phi) = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{13 - 12 \cos \alpha}} \quad (\text{P5.2-39})$$

Para determinar ahora una relación entre $\dot{\phi}$ y $\dot{\alpha}$ derivemos con respecto al tiempo la ecuación P5.4-38, con lo que resulta:

$$\dot{\theta} \left(\frac{2 \sin 2\theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta - 3}} - 2 \sin \theta \right) = \frac{6 \sin \alpha}{\sqrt{13 - 12 \cos \alpha}} \dot{\alpha} \quad (\text{P5.2-40})$$

y ahora derivando la ecuación P5.4-39, tenemos

$$\begin{aligned} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\theta + \phi) &= 2\dot{\alpha} \cos \alpha (13 - 12 \cos \alpha)^{-1/2} \\ &\quad - 12\dot{\alpha} \sin^2 \alpha (13 - 12 \cos \alpha)^{-3/2} \end{aligned} \quad (\text{P5.2-41})$$

El conjunto de ecuaciones de la P5.4-38 a la P5.4-41 nos permite expresar $\dot{\phi}$ en términos de $\dot{\alpha}$. Resolvamos numéricamente cuando $\alpha = 20^\circ$, sea $x = \cos \theta$, de la ecuación P5.4-38, se tiene:

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{13 - 12 \cos \alpha} &= \sqrt{4x^2 - 3} \\ 2x - 1,313 &= \sqrt{4x^2 - 3} \\ x &= 0,899 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= 0,899 \\ \sin \theta &= 0,438 \\ \theta &= 25,973^\circ \end{aligned} \right\}$$

Usando la ecuación P5.4-39, tenemos

$$\sin(25,973^\circ + \phi) = 0,521$$

$$\therefore \phi = 5,426^\circ$$

Y de la ecuación P5.4-40 se obtiene:

$$2,388\dot{\theta} = 1,563\dot{\alpha}$$

$$\dot{\theta} = 0,655\dot{\alpha}$$

Finalmente, de la ecuación P5.4-41

$$(0,655\dot{\alpha} + \dot{\phi}) 0,854 = 0,811\dot{\alpha}$$

$$\therefore \dot{\phi} = 0,295\dot{\alpha}$$

Una vez determinadas las relaciones entre los ángulos de giro y las velocidades angulares de la placa y la barra, pasemos a continuación a determinar la masa y la inercia de la placa. Según la Figura 5.24, podemos plantear para la masa de la placa:

$$M = 2 \int_0^{R\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{3}y}^{2R - \sqrt{R^2 - y^2}} \rho e \, dx \, dy$$

$$M = \rho e R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 42,751 \text{ kg}$$

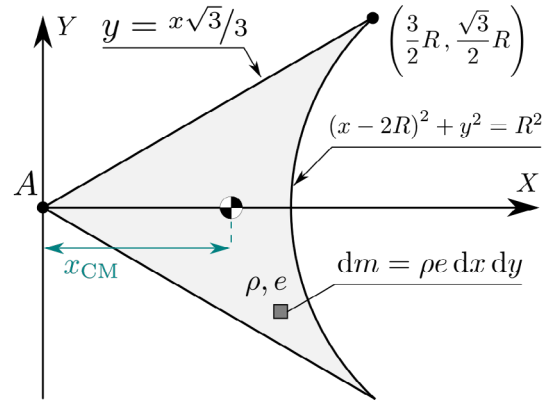


Figura 5.24: Geometría de la placa.

el primer momento de masa de la placa vale:

$$Q = 2 \int_0^{R\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{3}y}^{2R - \sqrt{R^2 - y^2}} \rho e x \, dx \, dy$$

$$Q = \rho e R^3 \left[\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \right] = 26,726 \text{ kg m}$$

por lo tanto la posición del centro de masa de la placa es $x_{CM} = Q/M \Rightarrow x_{CM} = 0,625\text{m}$.

El momento de inercia de la placa con respecto al eje X

$$I_x = 2 \int_0^{R\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{3}y}^{2R-\sqrt{R^2-y^2}} \rho e y^2 dx dy$$

$$I_x = 2\rho e R^4 \left(\frac{3}{32}\sqrt{3} - \frac{\pi}{24} \right) = 2,84 \text{ kg m}^2$$

y el momento de inercia con respecto al eje Y

$$I_y = 2 \int_0^{R\sqrt{3}/2} \int_{\sqrt{3}y}^{2R-\sqrt{R^2-y^2}} \rho e x^2 dx dy$$

$$I_y = \frac{2}{3}\rho e R^4 \left(\frac{135}{32}\sqrt{3} - \frac{17}{8}\pi \right) = 18,979 \text{ kg m}^2$$

El momento de inercia polar de la placa con respecto al punto A se determina como: $I_A = I_x + I_y$, de donde se obtiene: $I_A = 21,819 \text{ kg m}^2$. Por otro lado el momento de inercia de la barra con respecto a B es: $I_B = \frac{1}{12}m(2R)^2 = 6,021 \text{ kg m}^2$

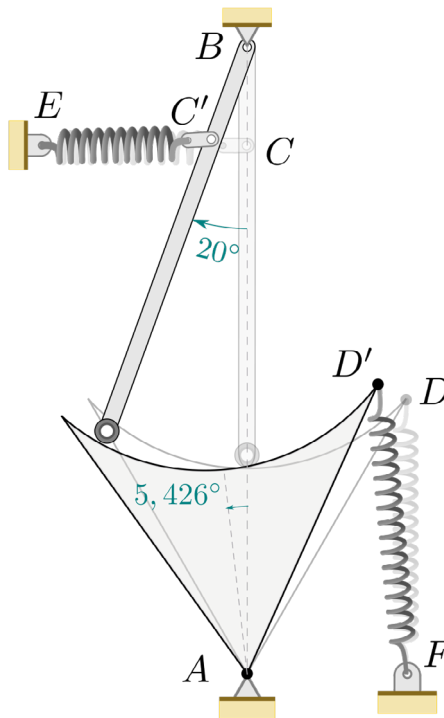


Figura 5.25: Configuración inicial y final del sistema.

Determinemos ahora la energía potencial inicial y final. En el instante inicial solo tenemos la energía potencial elástica del resorte horizontal

$$V_i = \frac{1}{2} (3k) R^2 = 1\,300,5 \text{ J}$$

En la configuración final, y a partir de la Figura 5.25, obtenemos $\angle EBC' = 51,565^\circ$, $\angle FAD' = 65,426^\circ$, por lo tanto, $EC' = 1,13\text{m}$ y $FD' = 1,345\text{m}$, entonces tenemos

$$V_f = \frac{1}{2} (3k) (1,13\text{ m} - 0,425\text{ m})^2 + \frac{1}{2} k (1,345\text{ m} - 1,275\text{ m})^2$$

$$V_f = 897,585 \text{ J}$$

por lo tanto, la variación de energía potencial elástica es

$$\Delta V = V_f - V_i = -402,915 \text{ J}$$

La variación de energía potencial gravitacional es

$$\Delta U = -Mgx_{\text{CM}} (1 - \cos \phi) = -1,174 \text{ J}$$

Usando la ley de conservación de energía mecánica, tenemos

$$\frac{1}{2} \times 21,819 \times \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \times 6,021 \times \dot{\alpha}^2 - 402,915 - 1,174 = 0$$

y usando la relación entre $\dot{\phi}$ y $\dot{\alpha}$:

$$0,949\dot{\alpha}^2 + 3,01\dot{\alpha}^2 = 404,089$$

despejando obtenemos finalmente los resultados pedidos:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= 10,103 \text{ rad/s} \\ \dot{\phi} &= 2,98 \text{ rad/s} \end{aligned} \right\}$$

Problema 5.5

Los extremos de la placa semicircular uniforme AB de masa $m = 10$ kg pueden deslizar sin fricción a lo largo de dos ranuras fabricadas en una placa vertical tal como se indica en la Figura 5.26. En el estado inicial la placa semicircular de diámetro $L = 75$ cm se encuentra en posición horizontal ($\theta = 0$), y el resorte de rigidez $k = 15$ N/cm se encuentra a su vez en su longitud natural. Si la placa se deja caer desde el reposo determine la rapidez del extremo B en el instante en que la placa forma un ángulo de 30° con respecto a la horizontal.

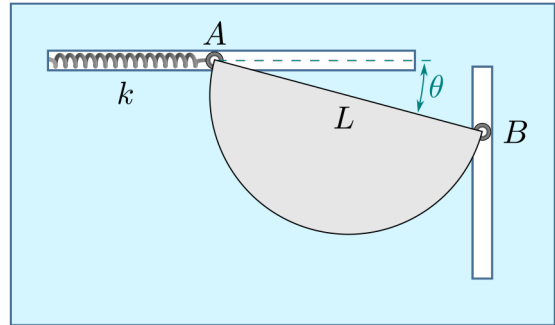


Figura 5.26: Problema 5.5.

Solución 5.5

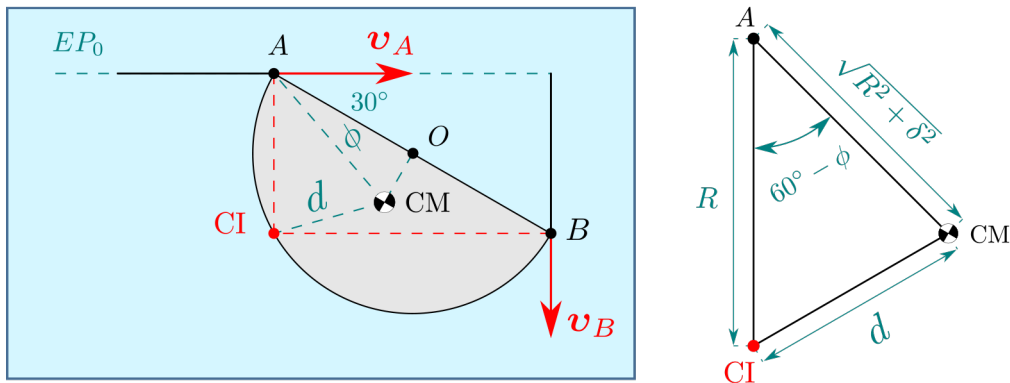


Figura 5.27: A la izquierda las velocidades de la placa. A la derecha la geometría del problema en el instante final.

Sea $\delta = 4R/3\pi$, la distancia desde el punto O al CM, tal y como indica la Figura 5.27, siendo $R = 37,5$ cm el radio de la placa. Tomando como nivel de referencia cero para la energía potencial gravitacional el punto A , el valor de esta última en el instante inicial se obtiene como:

$$E_i = -mg\delta = -15,613 \text{ J}$$

Calculemos ahora la energía cinética en el estado final, la placa rota con respecto al CI (centro instantáneo de rotación) tal y como se indica en la Figura 5.27

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi &= \frac{\delta}{\sqrt{R^2 + \delta^2}} \\ \cos \phi &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \delta^2}} \end{aligned} \right\}$$

entonces por teorema del coseno tenemos

$$\begin{aligned} d &= \left\{ 2R^2 + \delta^2 - 2R\sqrt{R^2 + \delta^2} \cos (60^\circ - \phi) \right\}^{1/2} \\ d &= \left\{ R^2 + \delta^2 - R\delta\sqrt{3} \right\}^{1/2} = 25,016 \text{ cm} \end{aligned}$$

El momento de inercia del disco con respecto al CI es AQUI

$$\begin{aligned} I_{\text{CI}} &= I_{\text{CM}} + md^2 \\ I_{\text{CI}} &= mR^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + md^2 = 0,724 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

por lo tanto, la energía cinética final es

$$T_f = \frac{1}{2} I_{\text{CI}} \dot{\theta}^2 = 0,362 \dot{\theta}^2$$

Ahora calculemos la energía potencial final, para el resorte tenemos:

$$\begin{aligned} U_{\text{Rf}} &= \frac{1}{2} k R^2 (2 - \sqrt{3})^2 \\ U_{\text{Rf}} &= 7,572 \text{ J} \end{aligned}$$

Por otro lado la energía potencial gravitacional final se determina como:

$$\begin{aligned} U_{\text{gf}} &= -mg\sqrt{R^2 + \delta^2} \sin (30^\circ + \phi) \\ U_{\text{gf}} &= -\frac{mg}{2} (R + \delta\sqrt{3}) = -31,915 \text{ J} \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la ley de conservación de energía mecánica: $\Delta E = 0 \Rightarrow$

$$\left(7,572 - 31,915 + 0,362\dot{\theta}^2\right) + 15,613 = 0$$

$$\dot{\theta} = 4,911 \text{ rad/s}$$

Finalmente la rapidez del extremo B se determina como:

$$v_B = R\sqrt{3}\dot{\theta} = 3,19 \text{ m/s}$$

Problema 5.6

Un disco de masa M y radio R que puede girar en su centro con la ayuda del pivote fijo O , se conecta por medio de la barra uniforme AB a un bloque de masa $M/4$ el que puede deslizarse sin fricción a lo largo del riel horizontal tal y como se indica en la Figura 5.28. Un resorte de rigidez k , que en el instante mostrado se encuentra comprimido en $3R/4$, conecta el bloque con un muro vertical fijo. La barra posee masa igual a $M/2$, determine

- Rapidez del bloque cuando el punto A pasa justo por sobre el punto O .
- Rapidez del bloque cuando el punto A pasa justo por sobre el punto B . Para ambas preguntas utilice $R = 65 \text{ cm}$, $M = 160 \text{ kg}$ y $k = 380 \text{ N/cm}$.

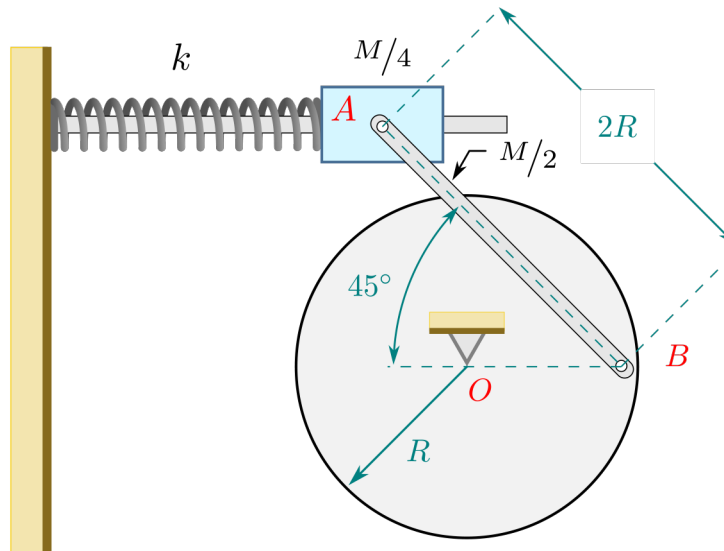


Figura 5.28: Problema 5.6.

Solución 5.6

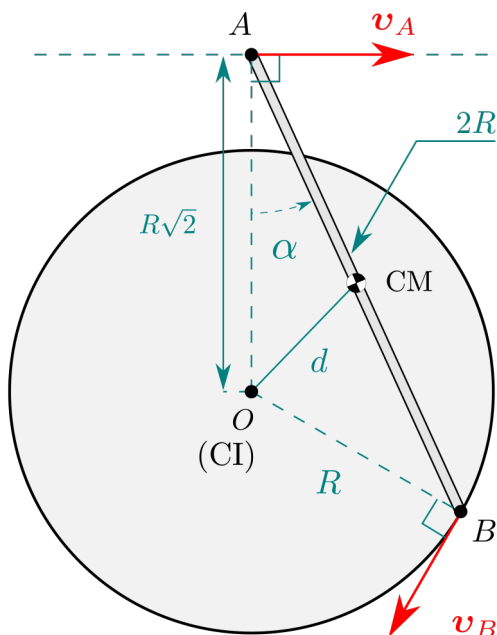


Figura 5.29: Velocidades de los extremos de la barra cuando el punto A pasa justo por sobre el punto O .

a) En la Figura 5.29 se muestra la configuración del sistema cuando el punto A pasa por el punto O . Se aprecia que el centro instantáneo de rotación de la barra (CI) coincide en este caso con el centro del disco. Primero notemos que:

$$\cos \alpha = \frac{2R^2 + 4R^2 - R^2}{4R^2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

de donde se desprende que:

$$d = \left\{ 2R^2 + R^2 - 2R^2\sqrt{2}\frac{5\sqrt{2}}{8} \right\}^{1/2} = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$$

Calculemos ahora la energía cinética final del sistema, esta última puede expresarse como:

$$T_f = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{4} \right) v_A^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{b_{CI}} \dot{\phi}^2$$

El momento de inercia de la barra con respecto al CI, $I_{b_{CI}}$, se obtiene como:

$$I_{b_{CI}} = \frac{1}{12} \left(\frac{M}{2} \right) (2R)^2 + \left(\frac{M}{2} \right) \left(\frac{1}{2} R^2 \right) = \frac{7}{24} MR^2$$

sabemos además que se cumple que:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= R\sqrt{2}\dot{\phi} \\ v_B &= R\dot{\phi} = R\dot{\theta} \end{aligned} \right\}$$

de la ecuación anterior concluimos que $\dot{\phi} = \dot{\theta}$. Por lo tanto, la energía cinética final del sistema se expresa como:

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{7}{48} MR^2 \dot{\theta}^2 \\ T_f &= \frac{31}{48} MR^2 \dot{\theta}^2 = 43,658 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Calculemos ahora las energías potenciales del sistema. En la configuración inicial se tiene:

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} k \left(\frac{3R}{4} \right)^2 - \frac{M}{2} g \frac{1}{2} R\sqrt{2} \\ U_i &= \frac{9}{32} k R^2 - \frac{1}{4} M g R\sqrt{2} = 4\,154,759 \text{ J} \end{aligned}$$

En la configuración final:

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} k \left(\frac{3R}{4} - R(\sqrt{2} - 1) \right)^2 - \frac{M}{2} g R \cos \alpha \\ U_f &= 454,234 \text{ J} \end{aligned}$$

Usando la ley de conservación de energía mecánica: $\Delta E = 0 \Rightarrow E_i = E_f$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 4\,154,759 &= 454,234 + 43,658 \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta} &= 9,207 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

finalmente la rapidez del bloque es: $v_A = R\sqrt{2}\dot{\theta} = 8,463 \text{ m/s}$

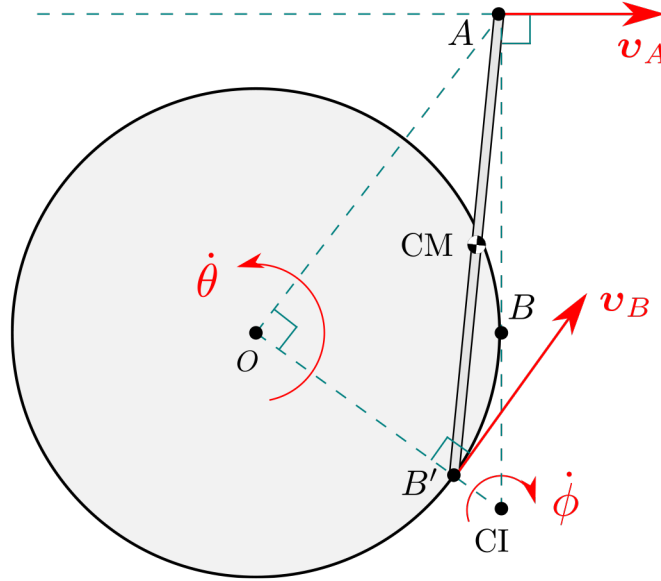


Figura 5.30: Velocidades de los extremos de la barra cuando el punto A pasa justo por sobre el punto B.

b) De la Figura 5.30, notamos que el triángulo $\triangle OAB'$ es rectángulo en O ya que el mismo puede inscribirse en una semicircunferencia con centro en CM, con esto obtenemos que: $\angle OAB = 30^\circ$, además $\angle OAB = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 35,264^\circ$. Se tiene por tanto que:

$$\overline{A - CI} = R\sqrt{3} \sec(35,264^\circ) = 137,885\text{cm}$$

$$\overline{O - CI} = R\sqrt{3} \tan(35,264^\circ) = 80,673\text{cm}$$

Por lo tanto $\overline{B' - CI} = 15,673\text{cm}$. La distancia entre el CM de la barra y el CI se obtiene como:⁸

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{2(15,673\text{cm})^2 + 2(137,885\text{cm})^2 - (130\text{cm})^2} = 73,512\text{cm}$$

⁸Ver nota al pie del problema 5.2

Por otro lado tenemos que $R\dot{\theta} = (\overline{B' - C\bar{I}})\dot{\phi}$, entonces $\phi = 4,147\dot{\theta}$, por lo tanto, la energía cinética final queda de la siguiente manera

$$T_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \times 160 \text{ kg} \right) (1,379 \text{ m})^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 160 \text{ kg} \times (0,65 \text{ m})^2 \right) \dot{\theta}^2 \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} \times 160 \text{ kg} \right) (1,3 \text{ m})^2 + \frac{1}{2} \times 160 \text{ kg} \times (0,735 \text{ m})^2 \right] (4,147\dot{\theta})^2 \\ T_f = 523,441\dot{\theta}^2$$

Calculemos ahora la energía potencial final

$$U_f = \frac{1}{2}k \left(\frac{3R}{4} - R\sqrt{2} \right)^2 - \frac{M}{2}gR \cos 5,264^\circ \\ U_f = 3\,033,601 \text{ J}$$

Usando la ley de conservación de energía mecánica tenemos: $\Delta E = 0 \Rightarrow E_i = E_f$

$$523,441\dot{\theta}^2 + 3\,033,601 = 4\,154,759$$

Resolviendo la ecuación se obtiene: $\dot{\theta} = 1,464 \text{ rad/s} \Rightarrow \dot{\phi} = 6,069 \text{ rad/s}$. Por lo tanto, la rapidez del bloque vale: $v_A = 137,885 \text{ cm} \dot{\phi} = 8,368 \text{ m/s}$

Problema 5.5

Tal y como se indica en la figura 5.31, la barra uniforme AB de largo L y masa m se une en cada uno de sus extremos a dos collarines mediante pivotes sin fricción. Los collarines pueden moverse a su vez a lo largo de dos varillas perpendiculares lisas y sin masa unidas como se muestra. Un resorte de constante k , une el collarin en B con la varilla vertical. En el instante inicial la barra se deja caer desde el reposo cuando forma un ángulo de 45° con la horizontal. Si todo el conjunto gira con velocidad angular ω en torno al eje vertical determine la rapidez que tendrá el collarin B , a lo largo de la varilla horizontal, cuando la barra adopte un ángulo de 30° respecto de esta última. Asuma que en la configuración inicial el resorte se encuentra en su posición no deformada.

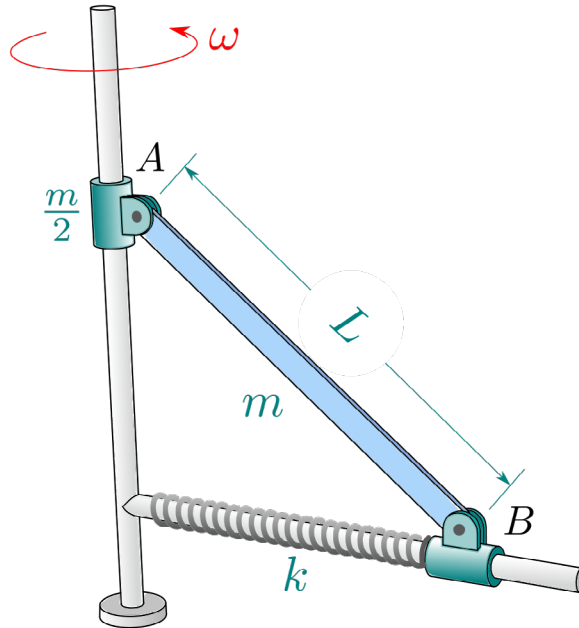


Figura 5.31: Problema 5.7.

Problema 5.5

Si escogemos como nivel de referencia para la energía potencial gravitacional la varilla horizontal, la energía potencial en el instante inicial vale:

$$U_i = \frac{1}{2}mgL\sqrt{2}$$

Como todo el sistema gira constantemente con velocidad angular ω , en el instante inicial existe energía cinética debida a la rotación de la barra en torno al eje vertical. El momento de inercia de la barra se determina como se indica en la figura 5.32. Si llamamos $\mu = m/L$ a la densidad por unidad

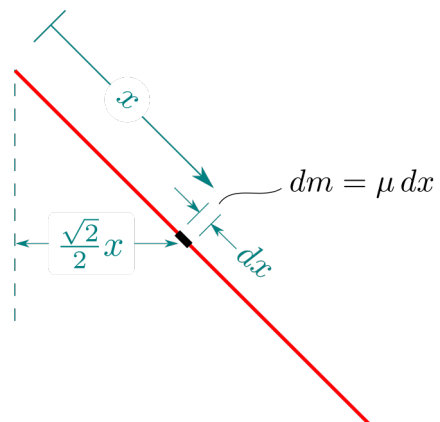


Figura 5.32: Determinación del momento de inercia de la barra

de longitud de la barra tenemos: $dI_A = \frac{1}{2}x^2 \mu dx$. La inercia de la barra se determina por tanto como:

$$I_A = \frac{1}{2} \mu \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{6} mL^2$$

La energía cinética inicial es por tanto:

$$T_i = \frac{1}{12} mL^2 \omega^2$$

Pasemos ahora a determinar la energía en el instante final. Como se indica en la figura, el movimiento de la barra puede ser descompuesto en dos rotaciones. En efecto, la barra además de girar en torno al eje vertical, gira en torno al centro instantáneo (CI). Este último se ubica trazando las perpendiculares a las velocidades que los extremos de la barra tienen a lo largo de las varillas⁹. De esta forma la energía cinética de la barra se escribe como:

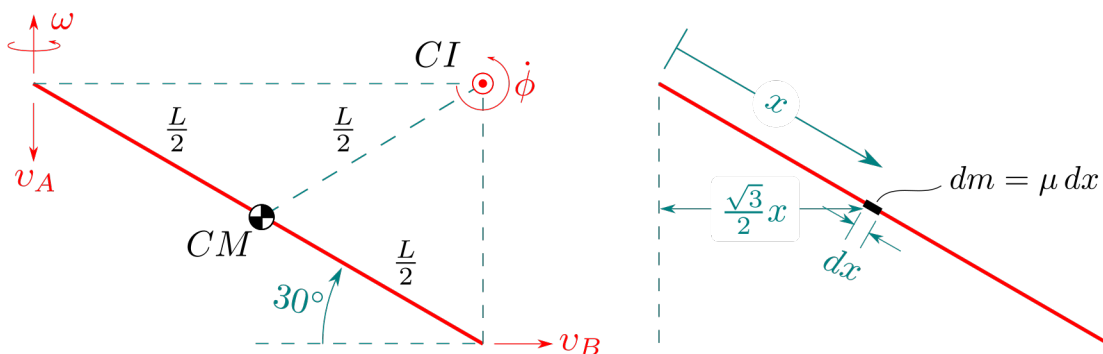


Figura 5.33: Centro instantáneo de rotación de la barra, y obtención de la inercia en torno al eje vertical.

$$T_{bf} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 + \frac{1}{2} I_{CI} \dot{\phi}^2$$

donde I_A es la inercia de la barra con respecto al eje vertical, I_{CI} es la inercia con respecto al CI, y $\dot{\phi}$ es la velocidad angular con respecto al CI. Para determinar la primera de estas cantidades notamos con la ayuda del esquema mostrado a la derecha

⁹Si se expresan las velocidades angulares de la barra en torno al eje vertical y al CI como vectores, la suma de estas determina el eje instantáneo de rotación de la barra

en la figura que $dI_A = \frac{3}{4}x^2\mu dx$, en consecuencia se tiene:

$$I_A = \frac{3}{4}\mu \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{4}mL^2$$

El momento de inercia con respecto al CI se determina como:

$$I_{CI} = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Podemos expresar la velocidad angular $\dot{\phi}$ en términos de la rapidez del collarin B como: $\dot{\phi} = \frac{2}{L}v_B$. De esta forma la energía cinética de la barra en el instante final corresponde a:

$$T_{bf} = \frac{1}{8}mL^2\omega^2 + \frac{2}{3}mv_B^2$$

La velocidad del collarin A se obtiene como: $v_A = \frac{1}{2}L\sqrt{3}\dot{\phi}$. La energía cinética final del sistema es por tanto:

$$T_f = \frac{1}{8}mL^2\omega^2 + \frac{17}{12}mv_B^2$$

La energía potencial del sistema en la configuración final vale:

$$U_f = \frac{1}{2}mgL + \frac{1}{8}kL^2(5 - 2\sqrt{6})$$

Teniendo en cuenta que para el sistema se cumple que $\Delta E = 0$, se tiene:

$$\frac{1}{8}mL^2\omega^2 + \frac{17}{12}mv_B^2 + \frac{1}{2}mgL + \frac{1}{8}kL^2(5 - 2\sqrt{6}) - \frac{1}{2}mgL\sqrt{2} - \frac{1}{12}mL^2\omega^2 = 0$$

De esta última ecuación se puede obtener la rapidez del collarin B a lo largo de la varilla horizontal.

CAPÍTULO 6

Vibraciones mecánicas

Cuando un sistema mecánico exhibe movimientos que poseen un patrón que se repite en el tiempo decimos que el sistema se encuentra sujeto a vibraciones mecánicas. Estos sistemas se encuentran caracterizados por la existencia de dos grupos de fuerzas. Una de estos grupos corresponde a las fuerzas restitutivas que se encargan de retornar el sistema a su posición de equilibrio, el otro grupo en tanto corresponde a las fuerzas disipativas que transforman parte de la energía mecánica en calor y en consecuencia son responsables de atenuar las vibraciones del sistema. El estudio de las vibraciones mecánicas y los problemas que esta causan han sido un desafío para la ingeniería desde los albores de la revolución industrial. En este capítulo analizaremos los casos más sencillos de vibraciones mecánicas, los cuales se reducen al estudio de sistemas oscilatorios lineales de un grado de libertad.

6.1. Oscilaciones libres

6.1.1. Caso no amortiguado

Considere el sistema mostrado en la Figura 6.1, el sistema requiere de una única coordenada para describir su movimiento, por lo que se le conoce comúnmente como el oscilador de un grado de libertad. El oscilador se compone de una masa m capaz de moverse sin fricción sobre una superficie horizontal, conectada por medio de un resorte de rigidez k a un soporte fijo. La fuerza ejercida por el resorte corresponde en este sistema a la fuerza restitutiva encargada de retornar la masa a su posición de equilibrio.

Si la masa es perturbada de su posición de equilibrio estático, podemos escribir en virtud de la segunda ley de Newton

$$m\ddot{x} = -kx \quad (6.1)$$

Reordenando y dividiendo por m obtenemos

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (6.2)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ corresponde a la frecuencia natural de oscilación de la masa. La ecuación 6.2 es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden cuya solución general es

$$x(t) = \alpha \sin(\omega_n t) + \beta \cos(\omega_n t) \quad (6.3)$$

Si las condiciones iniciales en $t = 0$ son $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, es sencillo comprobar que la solución de la ecuación 6.2 se puede expresar de la siguiente manera

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + x_0 \cos(\omega_n t) \quad (6.4)$$

El movimiento de la masa corresponde a un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento se obtiene al escribir la ecuación 6.4 de la forma $A \sin(\omega_n t + \phi)$, es decir

$$A \sin(\omega_n t + \phi) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + x_0 \cos(\omega_n t) \quad (6.5)$$

donde A es la amplitud y ϕ el ángulo de fase. Expandiendo el término $(\omega_n t + \phi)$ obtenemos

$$A \sin(\omega_n t) \cos \phi + A \cos(\omega_n t) \sin \phi = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + x_0 \cos(\omega_n t) \quad (6.6)$$

La expresión anterior es válida para todo valor del tiempo t . Esto último implica que

$$\left. \begin{aligned} A \cos \phi &= \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \\ A \sin \phi &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

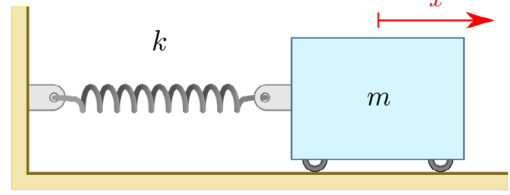


Figura 6.1: Oscilador de un grado de libertad. La masa m se conecta con un resorte de rigidez k a un soporte fijo. La configuración del sistema se describe con la coordenada x .

Resolviendo el sistema de ecuaciones 6.7 obtenemos los valores para la amplitud de oscilación y el ángulo de fase

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega_n} \sqrt{\dot{x}_0^2 + \omega_n^2 x_0^2} \\ \phi &= \arctan \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Otro sistema que exhibe un comportamiento similar es el péndulo simple. En este caso una masa, que asumiremos como puntual, se suspende de un punto fijo por medio de un cable inextensible que le permite oscilar en el plano. Cuando la masa es perturbada de su posición de equilibrio, es la fuerza de gravedad la que hace el rol de la fuerza restitutiva. Usando el ángulo que forma la cuerda con la vertical para describir el movimiento de la masa y aplicando la segunda ley de Newton en coordenadas polares, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} ml\dot{\theta}^2 &= T - mg \cos \theta \\ ml\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

de la segunda de las ecuaciones del sistema 6.9 concluimos que

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (6.10)$$

La ecuación 6.10, que corresponde a una ecuación diferencial no lineal, puede ser simplificada si consideramos el comportamiento del péndulo para pequeñas oscilaciones. En este caso podemos aproximar¹ $\sin \theta \approx \theta$ de manera que la ecuación 6.10 queda como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (6.11)$$

La ecuación 6.11 es análoga a la ecuación 6.2 que describe el movimiento del oscilador de un grado de libertad. La frecuencia natural de oscilación del péndulo simple puede,

¹Si expandimos en series de Taylor la función seno en torno a $\theta = 0$ (expansión de Maclaurin) obtenemos: $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$. Si θ es pequeño los términos de orden cúbico y superior son despreciables y por tanto $\sin \theta \approx \theta$.

por tanto, ser determinada como $\omega_n = \sqrt{g/l}$, es decir, que el tiempo que tarda la masa en ejecutar un ciclo de su oscilación está determinado solo por el largo de la cuerda². Esta fue la misma conclusión a la que llegó Galileo luego de analizar el movimiento de los incensarios (recipientes de incienso colgados por medio de cuerdas) de la catedral de Pisa. Galileo observó que se realizaban un mismo número de oscilaciones en igual tiempo. Los incensarios de distinto peso también oscilaban en el mismo intervalo de tiempo, siempre y cuando estuvieran amarrados a cuerdas de la misma longitud.

Muy similar al caso del péndulo simple constituye el sistema mostrado en la Figura 6.2, conocido como péndulo físico, en el cual un cuerpo rígido es suspendido de un punto fijo que le permite oscilar. Al igual que el péndulo simple, la fuerza de la gravedad hace el papel de la fuerza que restituye el movimiento a su posición de equilibrio. Usando la ecuación 5.19 y teniendo en cuenta que el momento ejercido por la gravedad con respecto al punto de giro es $mgd \sin \theta$, siendo d la distancia entre el centro de masa del cuerpo y el punto de giro, tenemos

$$I_O \ddot{\theta} + mgd \sin \theta = 0 \quad (6.12)$$

La ecuación 6.12, al igual que en el caso del péndulo simple, puede ser simplificada si centramos nuestro análisis en las pequeñas oscilaciones del cuerpo rígido, en cuyo caso obtenemos

$$I_O \ddot{\theta} + mgd \theta = 0 \quad (6.13)$$

De la ecuación 6.13 se desprende que la frecuencia de oscilación para el péndulo físico es igual a $\omega_n = \sqrt{mgd/I_O}$.

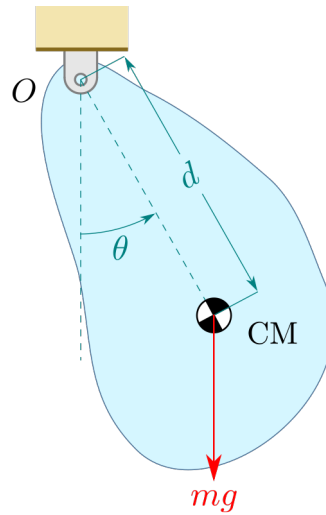


Figura 6.1: Péndulo físico de masa m capaz de girar en torno al pivote O . La distancia entre el pivote y el centro de masa del objeto es igual a d .

²También de la aceleración de gravedad, pero excepto muy pequeñas variaciones esta es esencialmente constante en la superficie terrestre.

6.1.2. Caso amortiguado

En todos los sistemas reales siempre existen fuerzas no conservativas que convierten parte de la energía mecánica en calor. La energía mecánica es disipada por los efectos de la fricción, como aquellos que se presentan en las uniones entre elementos, fricción interna producida por la deformación de los elementos que componen el sistema, así como consecuencia de las fuerzas de tipo viscoso, entre otros mecanismos. Cuantificar el amortiguamiento es por lo general difícil, ya que depende de muchos

factores. Para obtener soluciones cerradas de las ecuaciones de movimiento, usaremos la formulación más sencilla que implica suponer que el amortiguamiento es del tipo viscoso lineal, en cuyo caso las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad. Si consideramos el sistema mostrado en la Figura 6.3, el cual cuenta ahora con un amortiguador viscoso lineal de constante c , la ecuación de movimiento puede escribirse como

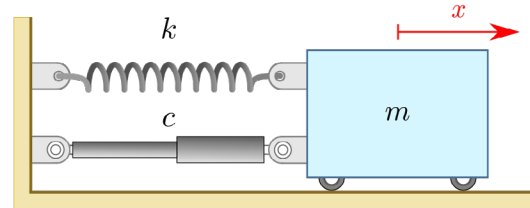


Figura 6.3: En el oscilador de un grado de libertad amortiguado la disipación de energía se representa con un amortiguador lineal de constante c .

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (6.14)$$

en donde la fuerza que ejerce el amortiguador corresponde a $F_D = c\dot{x}$. Si dividimos la ecuación 6.14 por m obtenemos

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (6.15)$$

El parámetro adimensional ξ , conocido como la razón de amortiguamiento crítico, determina si el sistema exhibe movimiento oscilatorio o no, y puede ser determinado como

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (6.16)$$

Si $\xi = 1$ entonces el coeficiente de amortiguamiento correspondiente se llama coeficiente de amortiguamiento crítico, c_{cr} y queda determinado por

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \quad (6.17)$$

El valor de c_{cr} representa el valor más pequeño del coeficiente de amortiguamiento que produce una respuesta aperiódica del sistema. Si $c < c_{cr}$, lo que es lo mismo que decir que $\xi < 1$, entonces el sistema está subamortiguado y presenta movimiento oscilatorio. Por el contrario, si $c > c_{cr}$ o bien $\xi > 1$, entonces el sistema se encuentra sobreamortiguado y no exhibe movimiento oscilatorio. Todo lo anterior queda resumido gráficamente en la Figura 6.4.

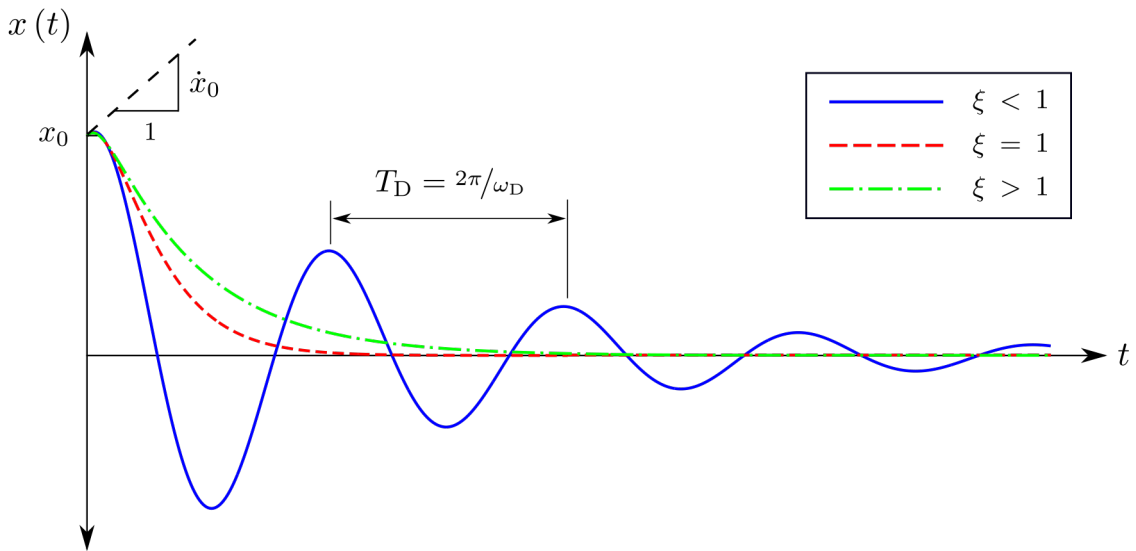


Figura 6.4: Respuesta del oscilador de un grado de libertad amortiguado, sometido a un desplazamiento inicial x_0 y una velocidad inicial $\dot{x}_0$, para distintos valores de la razón de amortiguamiento crítico.

La solución de la ecuación 6.15 puede ser escrita de la forma $x = e^{\lambda t}$, en donde λ es una constante desconocida, luego de reemplazar se obtiene

$$(\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2)e^{\lambda t} = 0 \quad (6.18)$$

La ecuación anterior es válida para todo tiempo t , por lo que debe cumplirse que

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (6.19)$$

Las soluciones de esta última ecuación son³

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.20)$$

Dependiendo del valor de ξ existen tres posibles casos para la respuesta del sistema.

Para el caso sobreamortiguado, es decir, si $\xi > 1$, las soluciones son reales y distintas, en este caso, la solución general de la ecuación 6.15 es

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6.21)$$

como λ_1 y λ_2 son ambas negativas la respuesta del sistema no presenta oscilación, como era de esperarse, y tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. Los valores de A_1 y A_2 pueden ser determinados a partir de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Si $\xi = 1$, las soluciones son iguales y la solución general de 6.15 se escribe como

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (6.22)$$

Tal y como fue discutido anteriormente, este caso corresponde al caso críticamente amortiguado. En este caso, el sistema retorna a su posición de equilibrio estático en el menor tiempo posible, lo que también se puede comprobar a partir de la Figura 6.4. Nuevamente, los valores de A_1 y A_2 pueden ser determinados a partir de las condiciones iniciales.

Si $\xi < 1$, el sistema está subamortiguado. La solución general de la ecuación 6.15 corresponde a

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6.23)$$

en donde ahora A_1 y A_2 son dos constantes complejas por determinar. Usando los valores para λ_1 y λ_2 , y definiendo $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ como la frecuencia amortiguada del sistema, la solución general puede ser escrita como

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A_1 e^{i\omega_D t} + A_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (6.24)$$

³Recuerde que $i^2 = -1$.

usando la identidad de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, la ecuación 6.24 se convierte en

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} ((A_1 + A_2) \cos(\omega_D t) + i(A_1 - A_2) \sin(\omega_D t)) \quad (6.25)$$

Expresando las constantes A_1 y A_2 como $A_{1R} + iA_{1I}$ y $A_{2R} + iA_{2I}$ respectivamente, se tiene

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \{ (A_{1R} + A_{2R}) \cos(\omega_D t) + (A_{2I} - A_{1I}) \sin(\omega_D t) + i((A_{1I} + A_{2I}) \cos(\omega_D t) + (A_{1R} - A_{2R}) \sin(\omega_D t)) \} \quad (6.26)$$

Como la respuesta del sistema es obviamente real, se desprende de la ecuación 6.26 que $A_{1I} = -A_{2I}$ y $A_{1R} = A_{2R}$. Usando las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, y luego de simplificar, concluimos:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(x_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D t) \right) \quad (6.27)$$

Observamos que en este caso la respuesta del sistema es oscilatoria y el tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos es igual al periodo amortiguado, que corresponde a $T_D = 2\pi/\omega_D$. Al igual que en los casos anteriores, la respuesta tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. En sistemas reales la respuesta vuelve a su posición de equilibrio en un tiempo finito, ya que los mecanismos detrás del amortiguamiento no son solo del tipo viscoso, la fricción se encarga de frenar la respuesta y detener la oscilación del sistema.

Si la solución dada por la ecuación 6.27 se escribe de la forma

$$x(t) = A \sin(\omega_D t + \phi) \quad (6.28)$$

Realizando un procedimiento similar al efectuado para encontrar la amplitud de movimiento oscilatorio en el caso no amortiguado, encontramos ahora que la amplitud disminuye con el tiempo y que se expresa como:

$$A = e^{-\xi\omega_n t} \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_D} \right)^2} \quad (6.29)$$

y el ángulo de fase se determina como:

$$\phi = \arctan \left(\frac{x_0 \omega_D}{\dot{x}_0 + \xi \omega_n x_0} \right) \quad (6.30)$$

La ecuación 6.29 indica que la amplitud de la oscilación decae exponencialmente con el tiempo, a diferencia de lo que ocurre en el caso no amortiguado en el cual la amplitud permanece constante.

6.2. Oscilaciones forzadas y resonancia

Estudiaremos ahora la respuesta del oscilador de un grado de libertad sujeto a la acción de una carga externa de tipo sinusoidal. Muchas situaciones que se presentan en la práctica pueden analizarse de manera aproximada mediante este modelo. Las vibraciones producidas en un vehículo que viaja a lo largo de un camino irregular, o las vibraciones inducidas por maquinaria rotativa sobre estructuras, son algunos ejemplos.

6.2.1. Caso no amortiguado

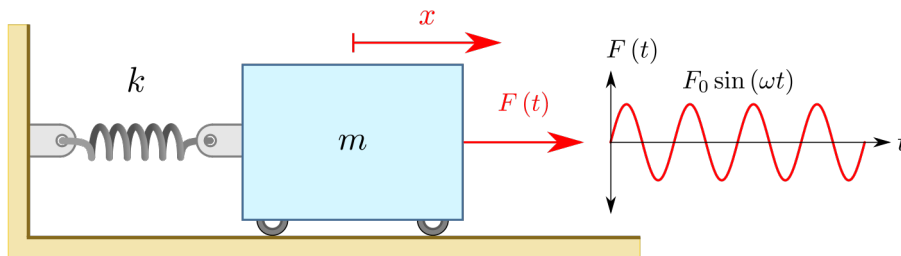


Figura 6.5: Oscilador de un grado de libertad no amortiguado sometido a la acción de una carga externa sinusoidal de amplitud F_0 y frecuencia ω .

Consideremos primero el sistema no amortiguado descrito en la Figura 6.5. La ecuación de movimiento correspondiente es:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad (6.31)$$

donde ω es la frecuencia de la fuerza externa. La solución de la ecuación 6.31 se compone de la solución general, la cual depende las condiciones iniciales, y que se expresa como

$$x_g(t) = \alpha \cos(\omega_n t) + \beta \sin(\omega_n t) \quad (6.32)$$

y la solución particular que tiene la forma

$$x_p(t) = D \sin(\omega t) \quad (6.33)$$

Podemos notar que la solución general depende de la frecuencia natural de oscilación del sistema, en tanto que la solución particular depende de la frecuencia de la fuerza externa. Si sustituimos la solución particular 6.33 en la ecuación 6.31 obtenemos

$$-Dm\omega^2 \sin(\omega t) + Dk \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (6.34)$$

de donde se desprende que:

$$D(k - m\omega^2) = F_0 \quad (6.35)$$

si dividimos ambos lados de la ecuación anterior por $(\omega/\omega_n)^2$, se tiene

$$D \left(\frac{k}{\rho^2} - m\omega_n^2 \right) = \frac{F_0}{\rho^2} \quad (6.36)$$

en donde definimos $\rho = \omega/\omega_n$. Recordando que $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y luego de reordenar términos, obtenemos:

$$D = \bar{x} \left(\frac{1}{1 - \rho^2} \right) \quad (6.37)$$

en donde $\bar{x} = F_0/k$ es la deformación del sistema debida a la aplicación estática de la fuerza F_0 . La respuesta del oscilador queda determinada por medio de la suma de la solución general y de la solución particular, esto es

$$x(t) = \alpha \cos(\omega_n t) + \beta \sin(\omega_n t) + \bar{x} \left(\frac{1}{1 - \rho^2} \right) \sin(\omega t) \quad (6.38)$$

Podemos ahora obtener las constantes α y β de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Luego de efectuar las operaciones necesarias concluimos que

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} - \bar{x} \left(\frac{\rho}{1 - \rho^2} \right) \right) \sin(\omega_n t) + \bar{x} \left(\frac{1}{1 - \rho^2} \right) \sin(\omega t) \quad (6.39)$$

Los primeros dos términos de la ecuación 6.39, que corresponden a la solución general, constituyen la respuesta en régimen transiente o transitoria, y el tercer término correspondiente a la solución particular representa la respuesta en régimen permanente. Las razones detrás de estas denominaciones quedarán más claras cuando analicemos la respuesta forzada del oscilador amortiguado, para el cual la respuesta en régimen transiente decae con el tiempo hasta eventualmente desaparecer, siendo solo la respuesta en régimen permanente la que subsiste en el tiempo.

La respuesta permanente puede ser escrita como

$$x_p(t) = \bar{x} R_d \sin(\omega t + \phi) \quad (6.40)$$

donde

$$R_d = \frac{1}{|1 - \rho^2|} \quad \text{y} \quad \phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } \rho < 1 \\ 180^\circ & \text{si } \rho > 1 \end{cases}$$

El término R_d se conoce como el factor de amplificación dinámica al desplazamiento, y representa el cociente entre la amplitud del desplazamiento en régimen permanente con respecto al desplazamiento del oscilador debido a la aplicación estática de la fuerza F_0 . En la Figura 6.6 podemos observar que el valor de R_d tiende a la unidad a medida que el valor de $\rho \rightarrow 0$. Lo anterior concuerda con lo esperado, ya que, si ρ es muy pequeño la fuerza externa actúa muy *lentamente*, de manera esencialmente estática, y por ende el máximo desplazamiento del oscilador coincide con $\bar{x}$. En el extremo opuesto, cuando ρ se hace muy grande, esto es cuando la fuerza externa varía muy *rápidamente*, el valor de R_d tiende a cero, indicando, a su vez, que la amplitud del desplazamiento en régimen permanente se hace nulo. Cuando $\rho \rightarrow 1$ el valor de R_d crece de manera ilimitada, lo que implica que la amplitud de la oscilación en régimen permanente tiende a infinito. Esta última situación no se presenta físicamente, sin embargo, como veremos más adelante, corresponde al caso límite cuando el oscilador no posee amortiguamiento.

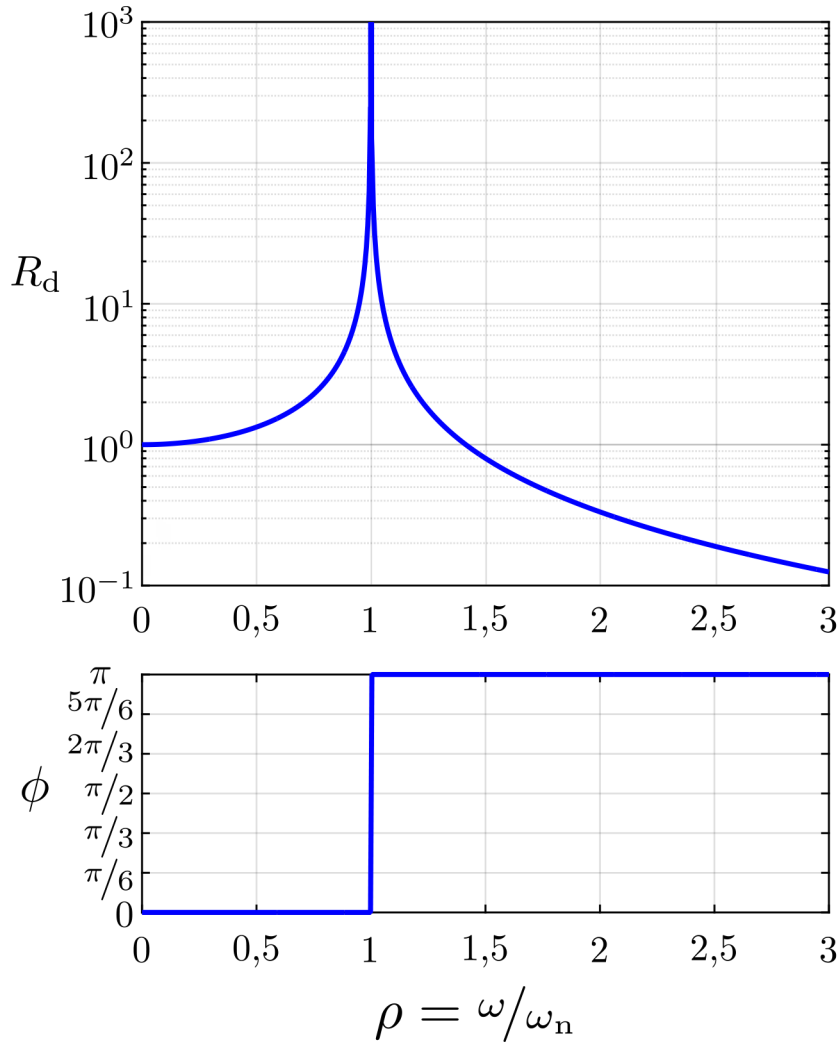


Figura 6.6: Factor de amplificación dinámica al desplazamiento R_d , y ángulo de fase ϕ para el caso no amortiguado.

Por otro lado, el ángulo de fase ϕ representa el *retraso* entre la respuesta del oscilador y la fuerza externa. Si $\rho < 1$ entonces $\phi = 0$, por lo tanto, el oscilador responde en el mismo sentido, o en fase con la fuerza aplicada. Si por el contrario $\rho > 1$ la respuesta del sistema ocurre en desfase respecto de la fuerza externa, indicando que el oscilador se mueve en sentido opuesto a la acción de la fuerza.

6.2.2. Caso amortiguado

La ecuación de movimiento para el oscilador amortiguado sujeto a una fuerza monofrecuencial externa se puede escribir como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (6.42)$$

La solución particular de la ecuación 6.42, que corresponde, a su vez, a la respuesta en régimen permanente del sistema se puede expresar como:

$$x_p(t) = Ae^{i(\omega t - \phi)} \quad (6.43)$$

En principio puede parecer extraño expresar la respuesta del sistema como un número complejo, que claramente no lo es, pero veremos a continuación la conveniencia de expresar la solución de esta forma. Reemplazando la ecuación 6.43 en la ecuación 6.42 obtenemos

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k) Ae^{i(\omega t - \phi)} = F_0 e^{i\omega t} \quad (6.44)$$

en donde ahora la fuerza externa corresponde a la parte real de la cantidad compleja $F_0 e^{i\omega t}$. Podemos interpretar gráficamente la ecuación 6.44 si graficamos en el plano complejo cada uno de sus términos, tal y como se describe en la Figura 6.7.

Observamos de la Figura 6.7 que debe cumplirse

$$F_0^2 = (k - m\omega^2)^2 A^2 + c^2 \omega^2 A^2 \quad (6.45)$$

Luego de simplificar y reordenar términos, obtenemos de la ecuación 6.45, el valor de la amplitud de oscilación en régimen permanente como

$$A = \bar{x} \cdot R_d \quad \text{con} \quad R_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 \xi^2}} \quad (6.46)$$

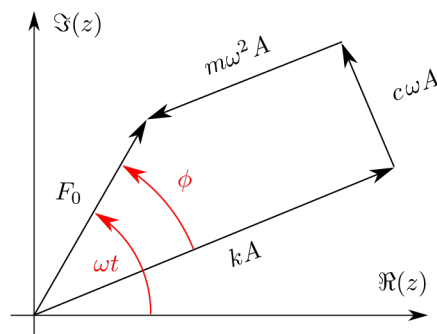


Figura 6.7: Diagrama vectorial de fuerzas.

En donde R_d es el factor de amplificación dinámica para el desplazamiento. El ángulo de fase también puede determinarse con ayuda de la Figura 6.8, a partir de la cual se desprende que

$$\phi = \arctan \left(\frac{2\xi\rho}{1 - \rho^2} \right) \quad (6.47)$$

La respuesta en régimen permanente corresponde, por tanto, a la parte real del lado derecho de la ecuación 6.43, es decir

$$x_p(t) = \bar{x}R_d \cos(\omega t - \phi) \quad (6.48)$$

El factor de amplificación R_d y el ángulo de fase ϕ se muestran en la Figura 6.8, en donde es posible apreciar la importancia del valor de la razón de frecuencias en la amplitud de la oscilación. Cuando $\rho \approx 1$, observamos que el valor de R_d muestra un considerable incremento el que a su vez es muy sensible al valor de la razón de amortiguamiento crítico. Esta condición, conocida comúnmente como resonancia, implica que una fuerza externa pequeña, cuya frecuencia coincida o sea similar a la frecuencia natural de oscilación del sistema, puede producir deformaciones muy superiores a la deformación estática. La resonancia es por ende un fenómeno potencialmente muy perjudicial, sus consecuencias se toman en cuenta en el diseño de estructuras que pueden verse afectadas por la resonancia cuando se someten a la acción del viento, sismos o maquinarias rotativas.

Sin embargo, no siempre la resonancia es un fenómeno dañino, pudiendo aprovecharse en algunos casos, como en la sintonización de una radio al permitir la selección y amplificación de una frecuencia específica mientras filtra las frecuencias no deseadas. También resulta fundamental en varias otras aplicaciones, como los teléfonos móviles, enrutadores de wifi, antenas parabólicas y dispositivos controlados a distancia.

La importancia del amortiguamiento en la repuesta del oscilador en el estado de resonancia queda de manifiesto en la Figura 6.9, en la que se aprecia que para $\rho = 1$ la fuerza externa es balanceada solamente por la fuerza producida por el amortiguador, siendo la fuerza inercial⁴ y la fuerza restitutiva de igual magnitud pero de sentido opuesto cancelándose mutuamente entre sí.

⁴Nos referimos aquí a la fuerza inercial como la fuerza ficticia que resulta de multiplicar la aceleración por la masa del oscilador.

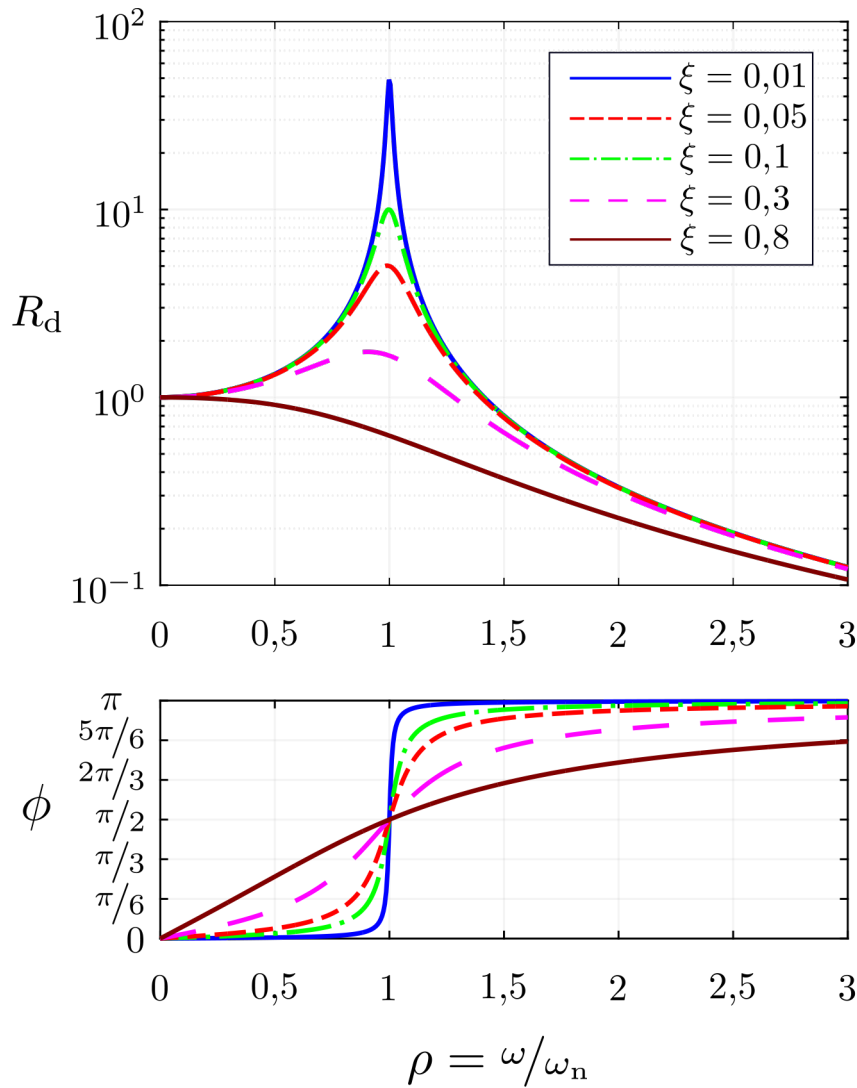


Figura 6.8: Factor de amplificación dinámica al desplazamiento R_d , y ángulo de fase ϕ para distintos valores de la razón de amortiguamiento crítico.

Se observa, a su vez, en la Figura 6.9, que a medida que ρ se hace cada vez menor, la fuerza externa es principalmente equilibrada por la fuerza restitutiva, en donde notamos además que $\phi < \pi/2$, en concordancia con lo que se aprecia en la Figura 6.8. En el extremo opuesto, en cambio, cuando $\rho > 1$, la fuerza externa es balanceada principalmente ahora por la fuerza inercial, y $\phi > \pi/2$, tal y como se indica en la Figura 6.8.

Hasta el momento, hemos considerado solo la respuesta en régimen permanente del sistema, lo que implica en la práctica suponer que la fuerza externa ha actuado un tiempo lo suficientemente extenso, como para que cualquier rastro de las vibraciones propias del sistema se hayan completamente desvanecido. Si el amortiguamiento es pequeño, el tiempo en el cual persiste la vibración propia del sistema puede ser muy largo, por lo que es necesario considerarlo en la respuesta del sistema. Esta vibración propia, es conocida como respuesta transiente, ya que se desvanece con el tiempo, depende de las condiciones iniciales y se obtiene a partir de la solución general de la ecuación 6.42, que posee la forma:

$$x_g(t) = e^{-\xi\omega_n t} (\alpha \cos(\omega_D t) + \beta \sin(\omega_D t)) \quad (6.49)$$

La solución total de la ecuación 6.42 corresponde, por tanto, a la suma de la solución general (respuesta transiente) más la solución particular (respuesta permanente), es decir

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (\alpha \cos(\omega_D t) + \beta \sin(\omega_D t)) + \bar{x}R_d \cos(\omega t - \phi) \quad (6.50)$$

en donde las constantes α y β se determinan a partir de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. En la Figura 6.10 se muestra esquemáticamente la respuesta total del oscilador amortiguado, indicándose además la componente transiente y permanente de la respuesta. Como ya se ha indicado, la respuesta transiente eventualmente desaparece, aunque desde un punto de vista teórico esto jamás ocurre, ya que el decaimiento de la respuesta transiente es exponencial. En la realidad, los distintos mecanismos de amortiguamiento, tales como la fricción, hacen que la respuesta transiente efectivamente desaparezca en el tiempo.

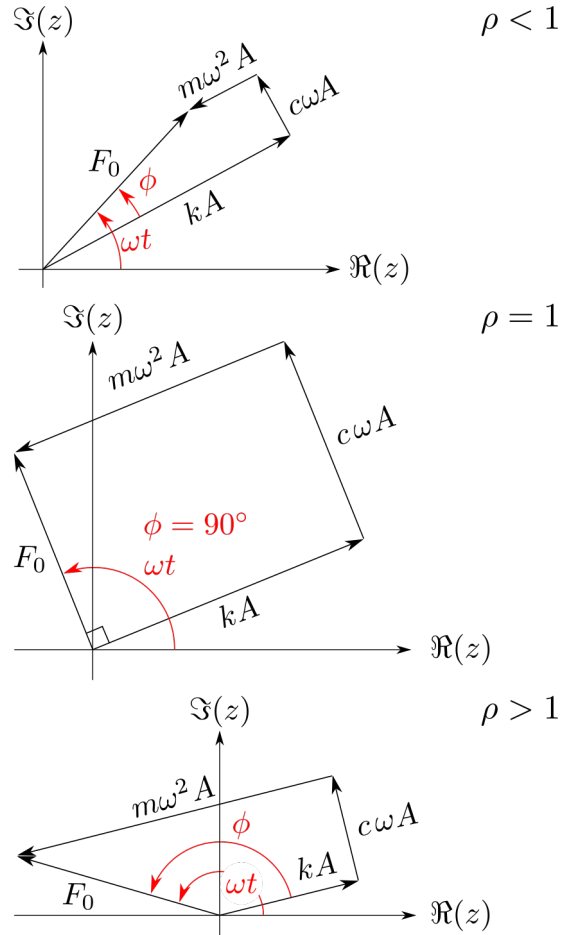


Figura 6.7: Diagrama vectorial de fuerzas para $\rho < 1$, $\rho = 1$ y $\rho > 1$.

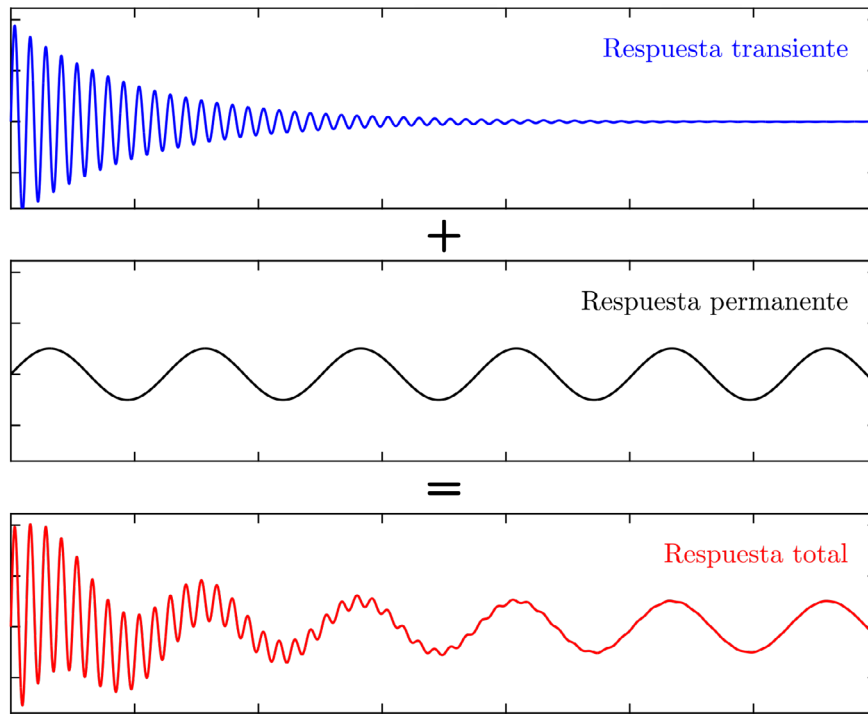


Figura 6.10: Respuesta total del oscilador amortiguado junto con la respuesta transiente y la respuesta permanente.

6.3. Problemas capítulo 6

Problema 6.1

Una placa plana de densidad ρ y espesor e de la forma indicada en la Figura 6.11 puede girar en torno al punto O . Una vara rígida sin peso conecta además el sistema a un resorte de rigidez k . Usando la ley de conservación de energía mecánica determine las ecuaciones de movimiento y el periodo de vibrar asumiendo pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estático. ¿A qué distancia se debe ubicar el resorte para que el periodo de vibrar se reduzca a la mitad respecto de la situación sin resorte?

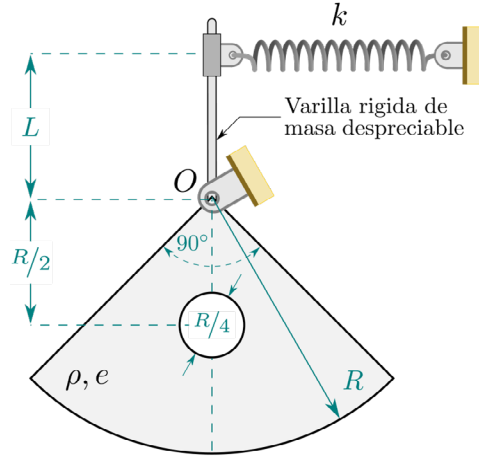


Figura 6.11: Problema 6.1.

Solución 6.1

En base a la Figura 6.12, la energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2$$

en donde I_O , que representa la inercia polar de masa de la placa con respecto al punto O , se puede determinar como sigue

$$I_O = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M}{64} \right) \left(\frac{R}{8} \right)^2 + \frac{M}{64} \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right]$$

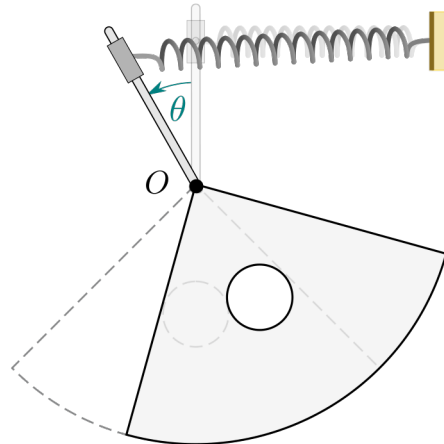


Figura 6.12: Posición deformada del sistema.

en donde M corresponde a la masa del disco de radio R completo. Como el radio de la perforación es igual a la octava parte del radio del disco (la densidad y espesor no cambia), entonces su área se reduce en un factor de $1/64$, lo mismo que su masa. Simplificando se obtiene:

$$I_O = \frac{991}{8192}MR^2$$

como $M = \pi R^2 \rho e$, se tiene:

$$I_O = \frac{991}{8192}\pi R^4 \rho e$$

Para determinar la energía potencial gravitacional cuando el sistema se ha sometido a un giro θ , notamos que el CM (centro de masa) de la placa asciende: $d(1 - \cos \theta)$, donde d es la distancia de O al CM de la placa, por lo tanto:

$$U_g = m_p g d (1 - \cos \theta)$$

siendo m_p la masa de la placa. Aproximando por series de Taylor hasta el segundo término:

$$U_g = m_p g d \frac{\theta^2}{2}$$

además

$$m_p = \frac{M}{4} - \frac{M}{64} = \frac{15}{64}\pi R^2 \rho e$$

la distancia d la calculamos como sigue

$$d = \frac{\frac{M}{4} \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi} - \frac{M}{64} \frac{R}{2}}{\frac{15}{64}M} = \frac{R}{90\pi} (128\sqrt{2} - 3\pi)$$

finalmente tenemos

$$U_g = \frac{1}{768}R^3 \rho g e (128\sqrt{2} - 3\pi) \theta^2$$

Por otro lado, la energía potencial elástica del sistema se escribe como: $U_e = \frac{1}{2}k\delta^2$, donde $\delta = L \sin \theta \approx L\theta$, por lo tanto

$$U_e = \frac{1}{2}kL^2\theta^2$$

Usando la ley de conservación de energía mecánica, $T + U_g + U_e = E$ constante, entonces

$$\frac{991}{16384}\pi R^4 \rho e \dot{\theta}^2 + \frac{1}{768}R^3 \rho g e (128\sqrt{2} - 3\pi) \theta^2 + \frac{1}{2}kL^2 \theta^2 = \text{cte.}$$

derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior:

$$\frac{991}{8192}\pi R^4 \rho e \ddot{\theta} + \frac{1}{384}R^3 \rho g e (128\sqrt{2} - 3\pi) \theta \dot{\theta} + kL^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

Simplificando obtenemos la ecuación de movimiento del sistema:

$$\frac{991}{128}\pi R^4 \rho e \ddot{\theta} + \left[\frac{1}{6}R^3 \rho g e (128\sqrt{2} - 3\pi) + kL^2 \right] \theta = 0$$

A partir de la ecuación de movimiento se desprende que el periodo natural del sistema vale:

$$T_n = \frac{\pi R^2}{2} \sqrt{\frac{2973\pi \rho e}{4R^3 \rho g e (128\sqrt{2} - 3\pi) + 24kL^2}}$$

o escrito de otro modo

$$T_n = \frac{\pi R^2}{2} \sqrt{\frac{A}{B + 24kL^2}}$$

donde $A = 2973\pi \rho e$ y $B = 4R^3 \rho g e$, el periodo sin resorte es

$$T_{n_0} = \frac{\pi R^2}{2} \sqrt{\frac{A}{B}}$$

por lo tanto, se pide que:

$$\frac{\pi R^2}{2} \sqrt{\frac{A}{B + 24kL^2}} = \frac{\pi R^2}{4} \sqrt{\frac{A}{B}}$$

y despejando L obtenemos

$$L = \sqrt{\frac{R^3 \rho g e (128\sqrt{2} - 3\pi)}{2k}}$$

Problema 6.2

Un disco perforado de densidad ρ y espesor e se encuentra unido a un resorte de rigidez k . Como se indica en la figura 6.13, en uno de sus extremos el resorte se conecta con un pasador que puede moverse verticalmente sin fricción de manera tal que el resorte siempre permanece en posición horizontal. Si el disco rueda sin resbalar, use la ley de conservación de energía mecánica para determinar las ecuaciones de movimiento y el periodo de vibrar asumiendo pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estático.

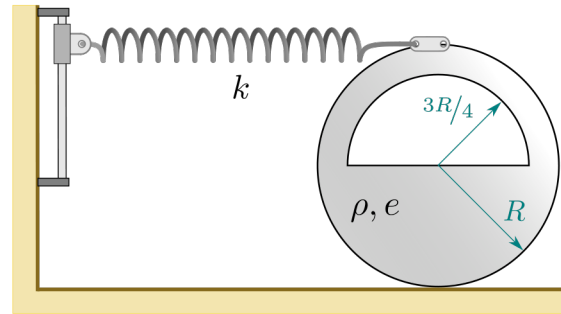


Figura 6.13: Problema 6.2. En la posición mostrada el sistema se encuentra en equilibrio estático.

Solución 6.2

Sea θ el ángulo de rotación del disco, como se muestra en la Figura 6.14, dado que el disco rueda sin resbalar, el desplazamiento horizontal del centro es $R\theta$. Si M la masa del disco de radio R completo sin perforación, entonces la masa del disco perforado es

$$M_D = M - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{16} M \right) = \frac{23}{32} M$$

La ubicación del centro de masa es

$$d = \frac{(M)(0) - \left(\frac{9}{32} M \right) \left(\frac{-4 \left(\frac{3R}{4} \right)}{3\pi} \right)}{\frac{23}{32} M}$$

$$d = \frac{9R}{23\pi}$$

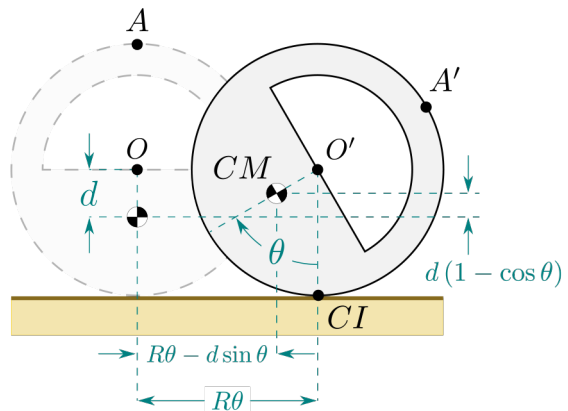


Figura 6.14: Posición deformada del sistema.

El momento de inercia polar del disco perforado con respecto al centro O se determina como:

$$I_O = \underbrace{\frac{1}{2}MR^2}_{\text{Inercia disco de radio } R \text{ completo}} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}M\right)\frac{9R^2}{16}\right)}_{\text{Inercia del semi-disco de radio } 3R/4 \text{ y masa } 9M/16}$$

por lo tanto

$$I_O = \frac{431}{1024}MR^2$$

entonces el momento de inercia polar con respecto al CM es

$$I_{CM} = I_O - \frac{23}{32}M\left(\frac{9}{23}\frac{R}{\pi}\right)^2$$

$$I_{CM} = \frac{MR^2}{23 \cdot 552\pi^2} (9 \cdot 913\pi^2 - 2 \cdot 592)$$

Calculemos ahora la energía cinética del disco perforado. El desplazamiento del CM del disco es:

$$\mathbf{r}_{CM} = \langle R\theta - d \sin \theta, d(1 - \cos \theta) \rangle$$

Derivando con respecto al tiempo obtenemos la velocidad del CM

$$\mathbf{v}_{CM} = \langle R\dot{\theta} - d\dot{\theta} \cos \theta, d\dot{\theta} \sin \theta \rangle$$

La energía cinética del disco se expresa por tanto como:

$$T = \frac{1}{2}M_D (R^2 - 2Rd \cos \theta + d^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 \quad (\text{P6.2-51})$$

Note que hubiéramos llegado al mismo resultado anterior, si hubiésemos calculamos la energía cinética como la energía de rotación con respecto al CI. En efecto, la inercia del disco con respecto al CI se determina como:

$$I_{CI} = I_{CM} + M_D l^2$$

donde l es la distancia entre el CM y el CI. Esta última vale: $l = \sqrt{(R - d \cos \theta)^2 + d^2 \sin^2 \theta}$
 La energía cinética en este caso es:

$$T = \frac{1}{2} I_{CI} \dot{\phi}^2$$

siendo $\dot{\phi}$ la velocidad angular de rotación con respecto al CI. Si usamos el hecho que el punto O se desplaza con rapidez $R\dot{\theta}$, podemos establecer que $R\dot{\phi} = R\dot{\theta}$, en consecuencia $\dot{\phi} = \dot{\theta}$, y la energía cinética queda como:

$$T = \frac{1}{2} M_D (R^2 - 2Rd \cos \theta + d^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}^2$$

Este último resultado es idéntico al que se obtuvo en la ecuación P6.2-51. Usamos ahora la condición de pequeñas oscilaciones que nos permite expresar la energía cinética como:

$$T = \frac{1}{2} M_D (R - d)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}^2$$

Por otra parte la energía potencial del sistema se escribe como:

$$U = M_D g d (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k (R\theta + R \sin \theta)^2$$

y aproximando para pequeñas oscilaciones

$$U = \frac{1}{2} M_D g d \theta^2 + 2kR^2 \theta^2$$

Usando la ley de conservación de energía mecánica $T + U = E = \text{constante}$, entonces

$$\frac{1}{2} M_D (R - d)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_D g d \theta^2 + 2kR^2 \theta^2 = E = \text{cte.}$$

Derivando con respecto al tiempo y simplificando obtenemos la ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} [M_D (R - d)^2 + I_{CM}] + \theta [M_D g d + 4kR^2] = 0$$

Por lo tanto, el periodo natural del sistema es

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{M_D (R - d)^2 + I_{CM}}{M_D g d + 4kR^2}}$$

Problema 6.3

Una placa de espesor y densidad uniforme, y cuya forma se compone de una semi-circunferencia y una porción de parábola como se indica en la Figura 6.15 se deja oscilar libremente apoyada desde su extremo superior, punto O .

- Determine el periodo de vibrar de la placa como función del radio R . ¿Cuánto debe valer el radio para que el periodo sea igual a 1 s?
- La placa ahora se orienta como se indica en la derecha de la Figura 6.15, para el radio encontrado en la pregunta anterior, determine el periodo de vibrar de la placa en esta nueva configuración.

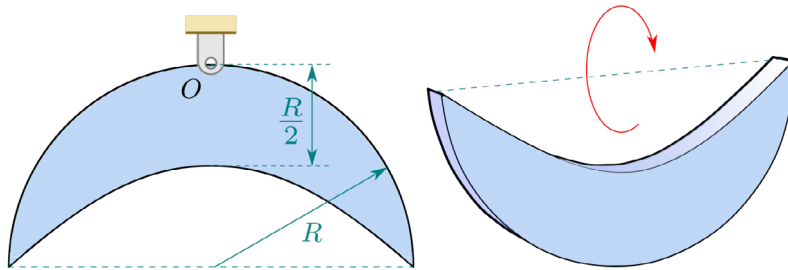


Figura 6.15: Problema 6.3.

Solución 6.3

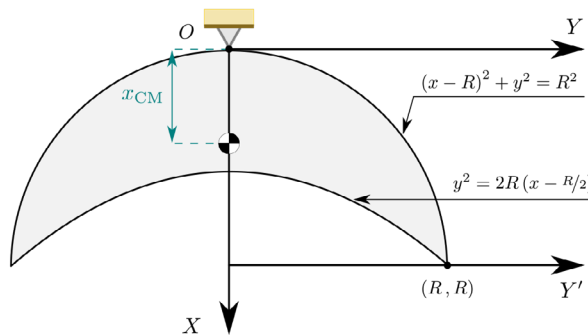


Figura 6.16: Propiedades geométricas de la placa.

a) Considerando la Figura 6.16, determinemos el momento de inercia polar⁵ de la placa con respecto al punto O como la suma $I_O = I_x + I_y$. Por integración, para el momento de inercia con respecto al eje X , tenemos

$$I_x = 2 \int_0^R \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{\frac{1}{2R}(y^2+R^2)} y^2 dx dy$$

$$I_x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2}{15} \right) R^4 = 0,259R^4$$

ahora para el momento de inercia con respecto al eje Y

$$I_y = 2 \int_0^R \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{\frac{1}{2R}(y^2+R^2)} x^2 dx dy$$

$$I_y = \left(\frac{15}{24}\pi - \frac{186}{105} \right) R^4 = 0,192R^4$$

finalmente sumando los momentos de inercia

$$I_O = I_x + I_y$$

$$\therefore I_O = 0,451R^4$$

Determinemos la ubicación del CM de la placa, el primer momento de área es

$$Q_y = 2 \int_0^R \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{\frac{1}{2R}(y^2+R^2)} x dx dy$$

$$Q_y = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{6}{5} \right) R^3 = 0,371R^3$$

El área de la placa vale:

$$A = 2 \int_0^R \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{\frac{1}{2R}(y^2+R^2)} dx dy$$

$$A = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R^2 = 0,904R^2$$

⁵Para la determinación del periodo de vibrar no se requiere de ρ y c ya que estos son constantes. Estrictamente hablando estamos calculando los momentos de inercia de área de la placa.

Por lo tanto, la ubicación del centro de masa de la placa es

$$x_{\text{CM}} = \frac{Q_y}{A}$$

$$\therefore x_{\text{CM}} = 0,41R$$

Entonces el periodo de vibrar de la placa se calcula como:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{0,451R^4}{9,81 \times 0,904R^2 \times 0,41R}} = 2,213\sqrt{R}$$

si $T_n = 1$ s, entonces

$$R = 0,204 \text{ m}$$

b) Ahora, si la placa se orienta como se indica en la derecha de la Figura 6.15, tenemos

$$\left. \begin{aligned} I_y &= I_{\text{CM}} + x_{\text{CM}}^2 A \\ I'_y &= I_{\text{CM}} + (R - x_{\text{CM}})^2 A \end{aligned} \right\} (-)$$

entonces restando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} I_y - I'_y &= A (x_{\text{CM}}^2 - R^2 + 2Rx_{\text{CM}} - x_{\text{CM}}^2) \\ I'_y &= I_y + A (R^2 - 2Rx_{\text{CM}}) \\ I'_y &= 0,355R^4 \end{aligned}$$

por lo tanto, el periodo natural ahora vale:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{0,355 \times (0,204)^4}{9,81 \times 0,904 \times (0,204)^2 \times 0,59 \times 0,204}}$$

$$\therefore T_n = 0,739 \text{ s}$$

Problema 6.4

Una placa de espesor y densidad uniformes y cuya forma se indica en la Figura 6.17 se deja oscilar libremente apoyada desde su extremo superior, punto O . Determine el periodo de vibrar de la placa como función del radio R , ¿cuánto debe valer el radio para que el periodo sea igual a 1 s?

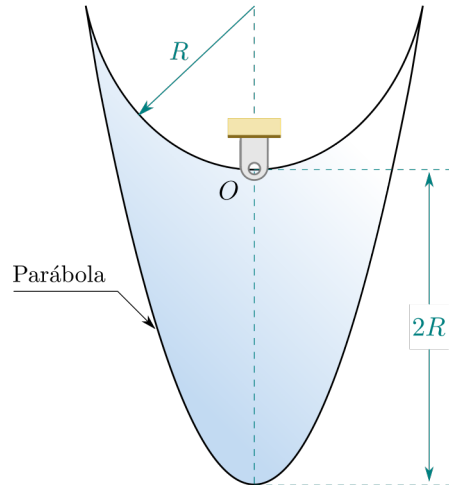


Figura 6.17: Problema 6.4

Solución 6.4

Primero determinemos los momentos de inercia y propiedades geométricas de la placa, en base a la Figura 6.18 tenemos

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_{-R}^R \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{3R-\frac{3}{R}x^2} y^2 dy dx \\ I_y &= \int_{-R}^R \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{3R-\frac{3}{R}x^2} x^2 dy dx \\ I_O &= I_x + I_y \end{aligned} \right\}$$

Para determinar el momento de inercia con respecto al punto A podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} I_A &= I_{CM} + Ad_A^2 \\ I_O &= I_{CM} + Ad_O^2 \end{aligned} \right\} (-)$$

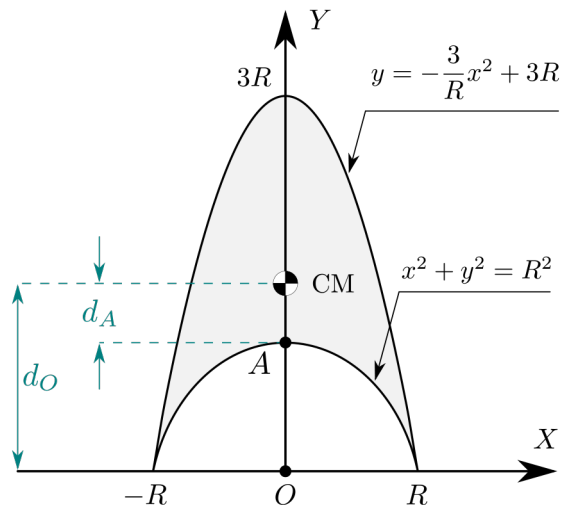


Figura 6.18: Geometría de la placa.

en donde A es el área de la placa, restando las ecuaciones anteriores y usando el hecho que: $d_O = d_A + R$ se obtiene:

$$I_A = I_O + A \left(d_A^2 - (d_A + R)^2 \right)$$

$$I_A = I_O + A \left(2d_A R + R^2 \right)$$

Obtengamos el momento de inercia con respecto al eje X

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{-R}^R \left(-\frac{27}{R^3} x^6 + \frac{81}{R} x^4 - 81 R x^2 + 27 R^3 - (R^2 - x^2)^{3/2} \right) dx$$

$$I_x = \left(\frac{1548}{35} - \frac{\pi}{8} \right) R^4$$

de la misma manera obtenemos el momento de inercia con respecto al eje Y

$$I_y = \int_{-R}^R \left(-\frac{3}{R} x^4 + 3 R x^2 - x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx$$

$$I_y = \left(\frac{4}{5} - \frac{3\pi}{8} \right) R^4$$

entonces tenemos

$$I_O = \left(\frac{1576}{35} - \frac{\pi}{2} \right) R^4$$

Ahora determinemos la posición del centro de masa de la placa, el primer momento de área es

$$Q_x = \int_{-R}^R \int_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{3R - \frac{3}{R}x^2} y \, dy \, dx$$

$$Q_x = \frac{62}{15} R^3$$

y el área de la placa es

$$A = \int_{-R}^R \int_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{3R - \frac{3}{R}x^2} dy \, dx$$

$$A = \left(4 - \frac{\pi}{2} \right) R^2$$

por lo tanto

$$d_O = \frac{\frac{62}{15}R^3}{\left(4 - \frac{\pi}{2}\right)R^2} = \frac{124}{15(8 - \pi)}R$$

entonces

$$d_A = \frac{4 + 15\pi}{15(8 - \pi)}R$$

conocidos estos valores podemos calcular el momento de inercia con respecto al punto A como sigue:

$$I_A = \left(\frac{1576}{35} - \frac{\pi}{2}\right)R^4 + \frac{1}{2}(8 - \pi)R^4 \left(2\left(\frac{4 + 15\pi}{15(8 - \pi)}\right) + 1\right)$$

$$I_A = \frac{5176}{105}R^4$$

Finalmente, tenemos que

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{5176}{105}R^4}{9,81 \times \frac{62}{15}R^3}} = 6,928\sqrt{R}$$

si $T_n = 1$ s, entonces

$$R = 0,02 \text{ m}$$

Problema 6.4

En la Figura 6.19, tres discos de igual espesor se encuentran unidos entre sí de manera concéntrica. Los discos están hechos del mismo material y se sabe que el disco central posee radio R y masa M . Los dos discos restantes poseen radio $3R/2$. Unidos a los discos exteriores se encuentran dos barras uniformes de masa M y largo $4R$ cada una. El disco central puede rodar sin resbalar sobre una superficie horizontal. Todo el conjunto se conecta por medio de dos resortes de rigidez $k/2$ como se indica. Asuma que el sistema se encuentra en equilibrio en la posición mostrada. Determine la ecuación lineal de movimiento del sistema, la frecuencia y el periodo natural de oscilación.

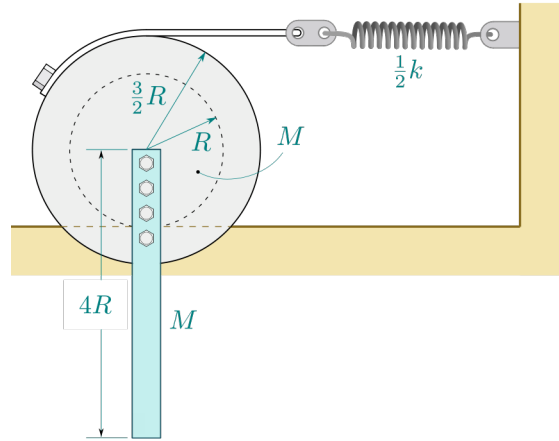


Figura 6.19: Problema 6.5.

Problema 6.4

De acuerdo a la Figura 6.20, sabemos que el disco rueda sin resbalar, por lo tanto, se cumple $x = R\theta$, además el desplazamiento del CM de las barras es

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \langle R\theta - 2R \sin \theta, 2R(1 - \cos \theta) \rangle$$

y aproximando por pequeñas oscilaciones

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} \approx \langle -R\theta, 0 \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_{\text{CM}} \approx \langle -R\dot{\theta}, 0 \rangle$$

Para los discos se tiene que su masa total es

$$M_T = M + 2 \left(\frac{9}{4} M \right) = \frac{11}{2} M$$

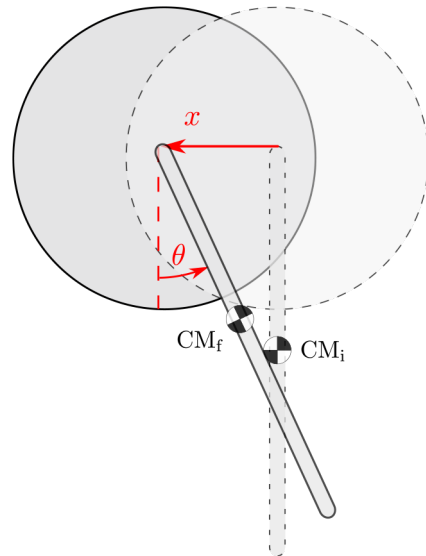


Figura 6.20: Sistema deformado.

El momento de inercia total de los discos vale

$$I_T = \frac{1}{2}MR^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{9}{4}M \right) \left(\frac{3}{2}R \right)^2 \right) = \frac{87}{16}MR^2$$

Por tanto, la energía cinética del sistema se determina como:

$$T = 2 \left(\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12}M(4R^2)\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{11}{2}M \right) R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{87}{16}MR^2 \right) \dot{\theta}^2$$

es decir:

$$T = 7,135MR^2\dot{\theta}^2$$

Para la energía potencial gravitatoria se tiene

$$U_g = 2(2MgR(1 - \cos \theta)) \approx 4Mg\frac{\theta^2}{2}$$

Para encontrar la energía potencial elástica notamos que la deformación de los resortes vale: $\delta_R = R\theta + \frac{3}{2}R\theta$, entonces

$$U_e = 2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} \right) \right) \left(R\theta + \frac{3}{2}R\theta \right)^2 = \frac{25}{8}kR^2\theta^2$$

Finalmente, se tiene que $T + U_g + U_e = \text{constante}$, por lo tanto

$$7,135MR^2\dot{\theta}^2 + 2Mg\theta^2 + \frac{25}{8}kR^2\theta^2 = \text{cte.}$$

y derivando con respecto al tiempo

$$14,27MR^2\ddot{\theta} + \left(4Mg + \frac{25}{4}kR^2 \right) \theta = 0$$

por lo tanto, la frecuencia natural del sistema es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4Mg + 6,25kR^2}{14,27MR^2}}$$

y el periodo natural de oscilación es

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{14,27MR^2}{4Mg + 6,25kR^2}}$$

CAPÍTULO 7

Dinámica de Lagrange y principio de mínima acción

Luego que Newton estableciese los principios de la mecánica, numerosos trabajos e importantes contribuciones fueron desarrolladas por científicos tales como Bernoulli, d'Alembert y Euler. Sin embargo, no fue hasta el año 1788 en el que Joseph-Louis Lagrange logra establecer la primera reformulación de la mecánica de Newton en su obra *Mécanique analytique*. En este texto quedan definidas las bases de la que hoy conocemos como dinámica de Lagrange, la que se fundamenta, a su vez, en el principio de los trabajos virtuales de d'Alembert. La gran ventaja de la formulación lagrangiana radica en que prescinde de las fuerzas de restricción, las que comprenden todas aquellas fuerzas responsables de restringir el movimiento del sistema a las condiciones geométricas o cinemáticas que este debe cumplir. A su vez, utiliza las energías del sistema, y no las fuerzas, por lo que no requiere del uso de vectores. Como veremos más adelante, clave para la comprensión de la dinámica de Lagrange, es el principio de la acción estacionaria (conocido comúnmente como mínima acción) desarrollado por el físico y matemático irlandés William Rowan Hamilton.

7.1. Coordenadas generalizadas

Para definir completamente la configuración de un sistema compuesto por N partículas se requieren un total de $3N$ coordenadas. En general, no todas estas coordenadas son siempre necesarias para describir el movimiento del sistema, ya que en muchas ocasiones el movimiento de las partículas se encuentra restringido, lo que implica que la cantidad de coordenadas puede ser menor. Así por ejemplo, en el caso del péndulo simple solo necesitamos una coordenada para describir su movimiento, puesto que existen dos restricciones. La primera de ellas surge del hecho de que el péndulo se mueve en un plano vertical. Si z es la coordenada normal al plano que contiene el movimiento del péndulo, entonces esta restricción se traduce en $z = \text{cte}$. La segunda restricción proviene del hecho de que la cuerda es inextensible, y por tanto, debe cumplirse que $\sqrt{x^2 + y^2} = l$.

Las cantidades independientes que deben ser especificadas para definir de forma única la configuración del sistema se denominan coordenadas generalizadas, el número de

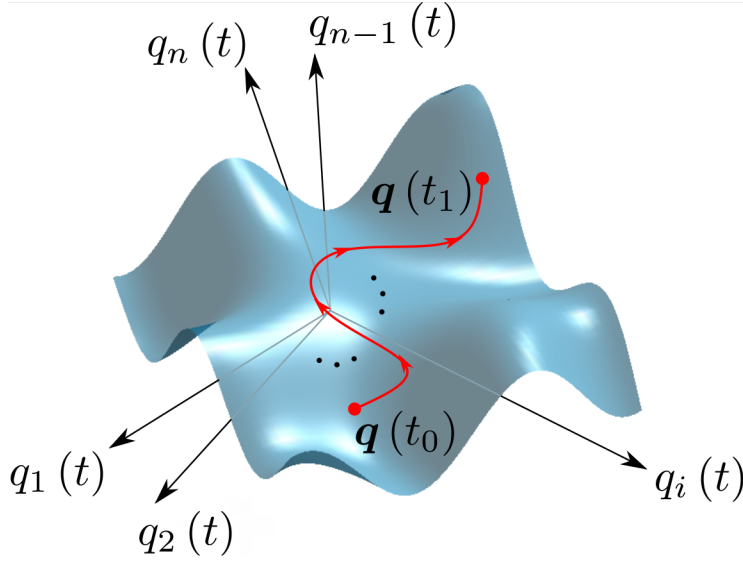


Figura 7.1: Espacio de configuraciones. Cada punto representa una posible configuración del sistema. A medida que el sistema evoluciona, el conjunto de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ traza una curva a través del espacio de configuraciones desde $t = t_0$ a $t = t_1$.

coordenadas generalizadas recibe a su vez el nombre de grados de libertad. Las coordenadas generalizadas no tienen que ser necesariamente coordenadas cartesianas, pueden ser coordenadas polares, esféricas o cualquier tipo de coordenadas que nos permita definir de la manera más sencilla posible la configuración del sistema. En general, podemos decir que un sistema de N partículas que posee k restricciones tiene $n = 3N - k$ grados de libertad. Describiremos las coordenadas generalizadas como $q_1, q_2, \dots, q_n$. Por otro lado, las cantidades $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ corresponderán a las velocidades generalizadas del sistema.

El espacio en el cual existen las coordenadas generalizadas se conoce como espacio de configuraciones. El espacio de configuraciones comprende, como su nombre lo indica, todas las posibles configuraciones que un sistema físico puede adoptar, considerando las restricciones a las que se encuentra sujeto. Un punto en el espacio de configuraciones queda definido por las coordenadas generalizadas $P(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, de la misma forma que un punto en el espacio es determinado por sus coordenadas cartesianas $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ver Figura 7.1.

7.2. Restricciones

Consideremos un sistema de N partículas. La ubicación de cada una de ellas queda definida por sus coordenadas cartesianas (x_i, y_i, z_i) con $i = 1 \dots N$. Para facilitar nuestros análisis posteriores notaremos el conjunto de estas coordenadas como $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$. De esta forma las coordenadas cartesianas de la i -ésima partícula corresponden a $(x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i})$.

Diremos que las restricciones son holonómicas si estas pueden expresarse como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad (7.1)$$

Como ejemplo de restricciones holonómicas consideremos el movimiento de una partícula que se mueve alrededor de un alambre cuya forma corresponde a la intersección entre una semiesfera y un cilindro, tal y como se describe en la Figura 7.2. Las restricciones, que corresponden a las ecuaciones de la esfera y el cilindro son:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \\ x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 &= \frac{R^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

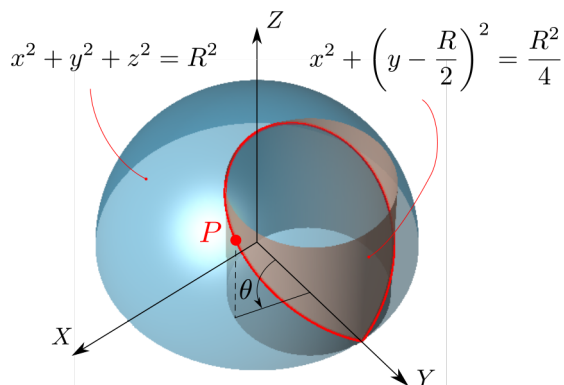


Figura 7.2: La partícula P viaja a lo largo de un alambre cuya forma corresponde a la intersección de una semiesfera y un cilindro.

con estas dos restricciones concluimos que la partícula posee un solo grado de libertad. Si escogemos como coordenada generalizada el ángulo de rotación de la partícula alrededor del eje del cilindro, como se indica en la Figura 7.2, tenemos

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) &= \frac{R}{2} \sin \theta \\ y(\theta) &= \frac{R}{2} (1 - \cos \theta) \\ z(\theta) &= R \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

El péndulo doble, mostrado en la Figura 7.3, es otro ejemplo de sistema con restricciones holonómicas. Este sistema consiste de un péndulo simple que contiene otro péndulo unido a él. Las restricciones del sistema se detallan en la ecuación 7.4.

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \text{cte.} \\ z_2 &= \text{cte.} \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} &= l_1 \\ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} &= l_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

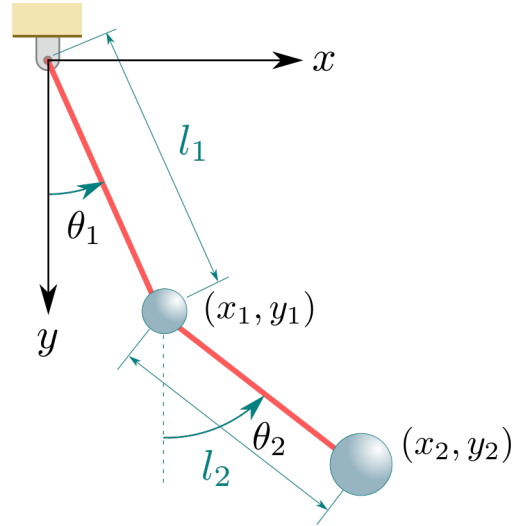


Figura 7.3: Péndulo doble. Las coordenadas generalizadas corresponden a los ángulos que forman las cuerdas con la vertical.

Las dos primeras restricciones simplemente indican que el movimiento del péndulo ocurre en un plano vertical. Por otra parte, la tercera y cuarta restricción establecen que las cuerdas poseen longitud fija. Concluimos, por tanto, que el péndulo doble debe poseer dos grados de libertad. Las coordenadas generalizadas se muestran en la Figura 7.3 y corresponden a los ángulos θ_1 y θ_2 que forman las cuerdas del péndulo con respecto a la vertical.

Si las restricciones no pueden ser escritas de la forma indicada por la ecuación 7.1 entonces diremos que son no holonómicas. Como ejemplo de este tipo de restricciones consideremos el movimiento de un cuerpo que se deja caer desde la cima de una superficie esférica, como se indica en la Figura 7.4. Mientras el objeto se mantenga sobre la superficie de la esfera la distancia entre su CM y el centro de la esfera permanece constante. Sin embargo, esta restricción deja de ser válida cuando el objeto se separa de la esfera, situación que ocurre cuando la fuerza normal es cero. De esta manera la restricción no es válida para todo tiempo t , y en consecuencia, no se puede expresar de la forma dada por la ecuación 7.1.

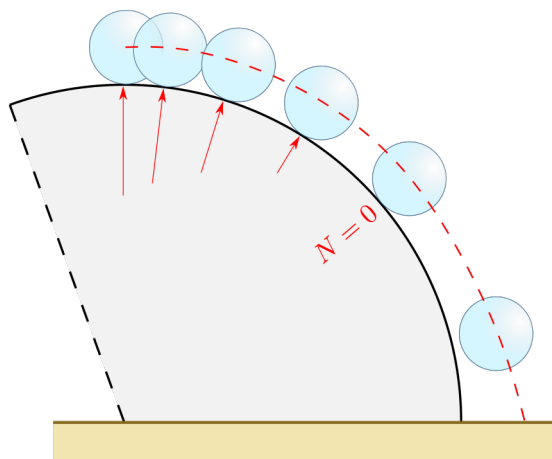


Figura 7.4: Ejemplo de restricción no holonómica.

7.3. Desplazamientos virtuales y trabajo virtual

Definimos los desplazamientos virtuales como desplazamientos infinitesimales de las coordenadas del sistema que satisfacen las siguientes condiciones

- Son infinitesimales.
- Cumplen con las ecuaciones de restricción del sistema.
- El tiempo permanece fijo durante los desplazamientos (el sistema está congelado a excepción de los desplazamiento virtuales).

Tal como su nombre lo indica, los desplazamientos virtuales se diferencian de los desplazamientos reales del sistema en el hecho que estos últimos ocurren en un intervalo de tiempo dt , durante el cual las fuerzas y restricciones pueden cambiar. Es importante destacar que lo anterior no ocurre durante la aplicación de un desplazamiento virtual, ya que el tiempo no cambia y, por tanto, tampoco pueden hacerlo ni las fuerzas aplicadas ni las restricciones del sistema. Para distinguir los desplazamientos virtuales de los desplazamientos reales usaremos la notación $\delta\gamma$ en sustitución de $d\gamma$.

Para un sistema de N partículas, podemos establecer relaciones entre las coordenadas cartesianas de las partículas con las coordenadas generalizadas del sistema mediante $i = 1 \dots 3N$ funciones de la forma

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t) \quad (7.5)$$

si tanto las coordenadas generalizadas como el tiempo se someten a un cambio infinitesimal, entonces

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad (7.6)$$

Si aplicamos ahora desplazamientos virtuales a las coordenadas generalizadas, podemos determinar el desplazamiento virtual de las coordenadas cartesianas a partir de la ecuación 7.6 como

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (7.7)$$

en donde usamos el hecho que el tiempo no cambia durante los desplazamientos virtuales, es decir, $\delta t = 0$. Definimos a continuación el trabajo virtual como el trabajo que realizarían las fuerzas que actúan sobre el sistema a medida que este último experimenta un desplazamiento virtual, es decir

$$\delta W = F_i \delta r_i \quad (7.8)$$

en donde δr_i es el desplazamiento virtual de la i -ésima partícula y F_i es la fuerza total que actúa sobre ella.

7.4. Principio de d'Alembert

Para entender este principio primero debemos hacer una distinción entre las fuerzas que existen en un sistema, específicamente debemos distinguir las fuerzas externas de las fuerzas de restricción. Las fuerzas externas, que ya hemos definido anteriormente, corresponden a las fuerzas que otros cuerpos o sistemas ejercen sobre el sistema bajo estudio. Por otra parte, las fuerzas de restricción constituyen aquellas fuerzas responsables de restringir el movimiento del sistema a las condiciones geométricas o cinemáticas que este debe cumplir. Por ejemplo, la tensión de la cuerda en un péndulo simple, o la fuerza normal que un plano inclinado ejerce sobre un objeto que se desliza sobre él, son ejemplos de fuer-

zas de restricción.

El principio de d'Alembert establece que las fuerzas de restricción no realizan trabajo durante un desplazamiento virtual. Como se trata de un principio no requiere una demostración formal, sin embargo, resulta útil comprobar su veracidad en algunos casos.

a) Máquina de Atwood de dos poleas: En la Figura 7.5 se muestra una máquina de Atwood que consiste de dos poleas de masa despreciable unidas por una cuerda inextensible, asumimos además que toda fricción presente en el sistema es despreciable. La restricción proviene del hecho de que la cuerda posee longitud fija, y por ende, la fuerza de restricción corresponde a la tensión de la cuerda. Como tanto la masa de las poleas y la fricción son despreciables es fácil comprobar que la tensión de la cuerda es uniforme. El trabajo virtual de las fuerzas de restricción es en consecuencia

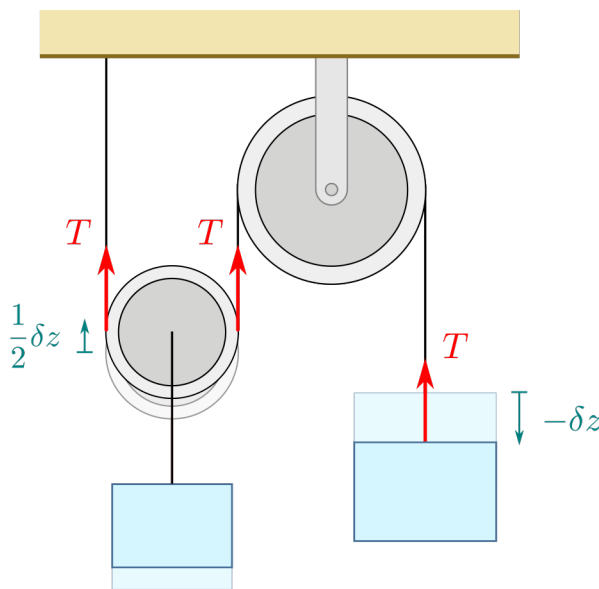


Figura 7.5: Máquina de Atwood de dos poleas. Como la cuerda es inextensible la polea móvil se mueve la mitad del desplazamiento de la masa de la derecha.

$$\delta W = \mathbf{T} \cdot (-\delta \mathbf{z}) + \mathbf{T} \cdot \left(\frac{1}{2}\delta \mathbf{z}\right) + \mathbf{T} \cdot \left(\frac{1}{2}\delta \mathbf{z}\right) = 0 \quad (7.9)$$

b) Péndulo doble: En el péndulo doble las fuerzas de restricción corresponden a las tensiones de las cuerdas. Tal y como se indica en la Figura 7.6, si $\delta \mathbf{r}_1$ y $\delta \mathbf{r}_2$ son los desplazamientos virtuales de las masas, entonces el trabajo virtual de las fuerzas de restricción se escribe como

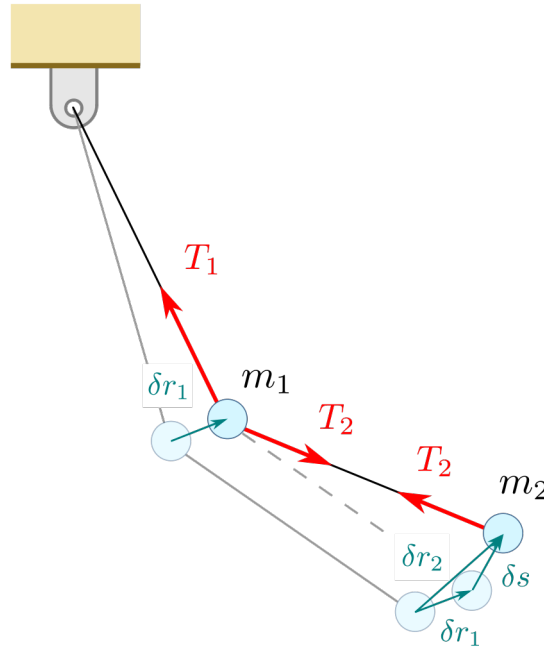


Figura 7.6: Péndulo doble, se muestran los desplazamientos virtuales y las fuerzas de restricción.

$$\delta W = \mathbf{T}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{T}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + (-\mathbf{T}_2) \cdot \delta \mathbf{r}_2 \quad (7.10)$$

el primer término del lado derecho de la ecuación 7.10 es cero, ya que, la tensión $\mathbf{T}_1$ y el desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}_1$ son perpendiculares entre sí. Por otra parte, tal como se muestra en la Figura 7.10, el desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}_2$ es igual a la suma de $\delta \mathbf{r}_1$ más el desplazamiento virtual $\delta \mathbf{s}$, resultado de la rotación de la masa m_2 en torno a la masa m_1 , es decir

$$\delta W = \mathbf{T}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_1 - \mathbf{T}_2 \cdot (\delta \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{s}) = \mathbf{T}_2 \cdot \delta \mathbf{s} \quad (7.11)$$

como $\mathbf{T}_2$ y $\delta \mathbf{s}$ son perpendiculares entre sí concluimos, por tanto, que $\delta W = 0$.

c) Controlador centrífugo de Watts: El controlador centrífugo, mostrado esquemáticamente en la Figura 7.7, es un sistema de control automático utilizado para regular la velocidad de rotación de máquinas. Concebido originalmente por James Watt en el año 1788 para controlar la rotación de las primeras máquinas a vapor, el dispositivo consiste de dos masas que se conectan mediante brazos articulados a un eje giratorio. A medida que la velocidad de rotación de la máquina aumenta, la fuerza centrífuga hace que las masas se separen cada vez más del eje elevando el pasador inferior, el que se comunica por medio de una palanca a una válvula de mariposa responsable de limitar el flujo de combustible a la máquina.

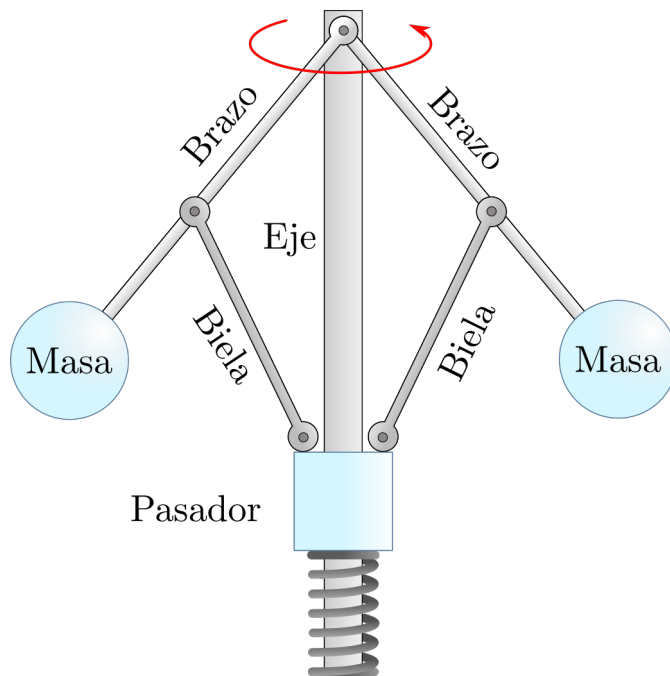


Figura 7.7: Controlador centrífugo de Watts.

En la Figura 7.8 se muestra una versión simplificada de la geometría del dispositivo junto con los desplazamientos virtuales. El trabajo de las fuerzas de restricción, correspondientes a la tensión $\mathbf{T}$ en el brazo y la compresión $\mathbf{C}$ de la biela, se determina como

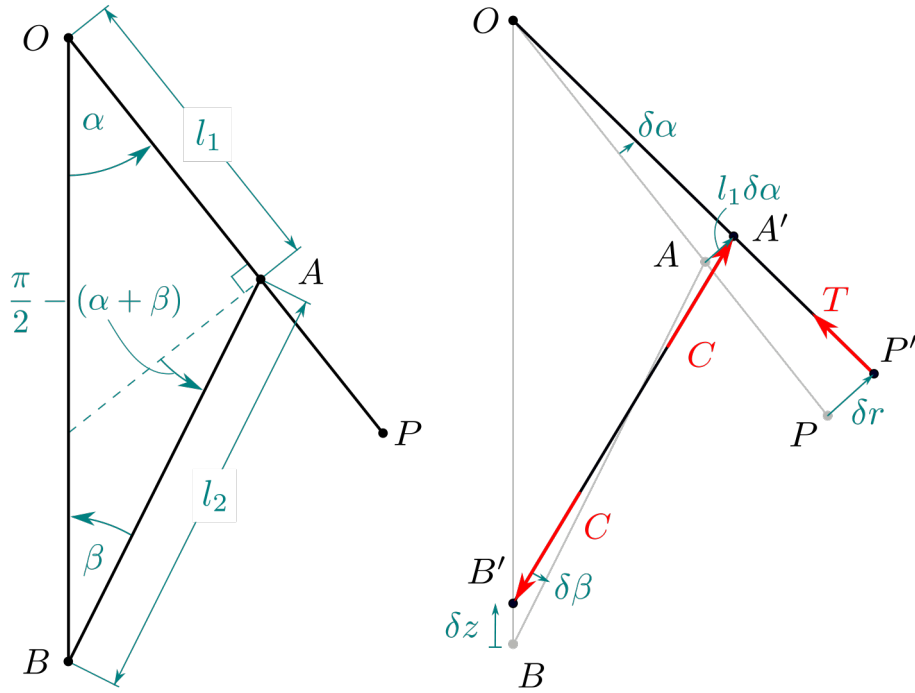


Figura 7.8: Esquema simplificado de la geometría del controlador centrífugo de Watts. OP representa uno de los brazos y AB una de las bielas.

$$\delta W = \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{C} \cdot \delta \mathbf{z} + \mathbf{C} \cdot \overrightarrow{l_1 \delta \alpha} \quad (7.12)$$

el primer término del lado derecho de la ecuación es cero, ya que $\mathbf{T}$ y $\delta \mathbf{s}$ son perpendiculares. A partir de la Figura 7.8 se tiene que $OB = l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta$, por lo tanto

$$\delta z = \delta (l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta) = -l_1 \delta \alpha \sin \alpha - l_2 \delta \beta \sin \beta \quad (7.13)$$

La ecuación 7.12 puede ser reescrita como

$$\delta W = -C \cos \beta (l_1 \delta \alpha \sin \alpha + l_2 \delta \beta \sin \beta) + C \sin (\alpha + \beta) l_1 \delta \alpha \quad (7.14)$$

luego de simplificar se obtiene

$$\delta W = l_1 \delta \alpha \cos \alpha \sin \beta - l_2 \delta \beta \sin \beta \cos \beta \quad (7.15)$$

usando el teorema del seno para el triángulo $\triangle OAB$

$$\sin \beta = \frac{l_1}{l_2} \sin \alpha \quad (7.16)$$

de la ecuación 7.16 concluimos

$$\delta \beta = \frac{l_1 \cos \alpha}{l_2 \cos \beta} \delta \alpha \quad (7.17)$$

reemplazando este último resultado en la ecuación 7.15 obtenemos que $\delta W = 0$ tal y como se quería demostrar.

7.5. Fuerzas generalizadas

El trabajo virtual realizado por las fuerzas externas aplicadas al sistema se determina como

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i \quad (7.18)$$

la ecuación 7.18 puede expresarse en términos de las coordenadas generalizadas usando la ecuación 7.7

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (7.19)$$

la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\delta W = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (7.20)$$

en donde definimos

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (7.21)$$

como la fuerza generalizada asociada a la j -ésima coordenada generalizada. La fuerza generalizada puede ser obtenida mediante la ecuación 7.21, o bien a partir del trabajo virtual identificando el término que acompaña a δq_j . Es importante notar que las dimensiones de Q no son necesariamente las de fuerza. Así como δq puede representar un desplazamiento o una rotación, Q puede ser una fuerza o un torque. No obstante, siempre $Q\delta q$ debe tener dimensiones de trabajo.

7.6. Ecuaciones de Lagrange

Aplicamos ahora la segunda ley de Newton a cada una de las de las partículas del sistema según cada una de sus coordenadas, es decir

$$\dot{p}_i = F_i + R_i \quad (7.22)$$

en donde $i = 1 \dots 3N$ y R_i representa las fuerzas de restricción del sistema. Reuniendo todos los términos de la ecuación 7.22, y luego de sumar y multiplicar por los respectivos desplazamientos virtuales obtenemos

$$\sum_{i=1}^{3N} (\dot{p}_i - F_i) \delta x_i - \sum_{i=1}^{3N} R_i \delta x_i = 0 \quad (7.23)$$

en virtud del principio de d'Alembert la segunda sumatoria en la ecuación 7.23 es igual a cero, por lo que esta se reduce a

$$\sum_{i=1}^{3N} (\dot{p}_i - F_i) \delta x_i = 0 \quad (7.24)$$

La ecuación 7.24 posee un importante significado físico ya que nos indica que la tasa de cambio del momento lineal está determinada únicamente por las fuerzas externas. Note que dado que los desplazamientos virtuales no son todos linealmente independientes no se puede concluir que $\dot{p}_i - F_i = 0$. El siguiente paso consiste en reescribir en términos de las coordenadas generalizadas la ecuación 7.24. Solo nos hace falta expresar el término $\sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \delta x_i$ en coordenadas generalizadas, dado que en la sección anterior ya obtuvimos la expresión para el trabajo virtual de las fuerzas externas en dichas coordenadas. Recono-

ciendo que $\dot{p}_i = m_\lambda \ddot{x}_i$ tenemos¹

$$\sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} m_\lambda \frac{d\dot{x}_i}{dt} \delta x_i \quad (7.25)$$

como $\delta x_i = \sum_{j=1}^n (\partial x_i / \partial q_j) \delta q_j$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} m_\lambda \frac{d\dot{x}_i}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (7.26)$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{3N} m_\lambda \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (7.27)$$

A partir de la regla de la derivada de un producto obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (7.28)$$

usando este último resultado, podemos reescribir la ecuación 7.27 como

$$\sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_\lambda \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \right] \right\} \delta q_j \quad (7.29)$$

centremos nuestra atención en las derivadas con respecto al tiempo que aparecen dentro de las sumatorias. A partir de la ecuación 7.5

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (7.30)$$

en consecuencia

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (7.31)$$

¹Usamos como subíndice para la masa el contador λ que se relaciona con i como $\lambda = [i/3]$, donde $[x] = \min \{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$ es la función techo. Así por ejemplo, para $i = 7, 8, 9$ resulta $\lambda = 3$, ya que las coordenadas x_7, x_8, x_9 están asociadas con la tercera partícula.

Pasamos a continuación a demostrar que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad (7.32)$$

el término del lado izquierdo de 7.32 se puede expandir como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (7.33)$$

Por otro lado, el término del lado derecho de 7.32 queda como

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \quad (7.34)$$

en donde hemos utilizado el resultado de la ecuación 7.30. Recordando que el orden de las derivadas parciales es irrelevante

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (7.35)$$

comparando las ecuaciones 7.33 y 7.35 concluimos que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$. Utilizando este último resultado en conjunto con la igualdad 7.31, la ecuación 7.29 se convierte en

$$\sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_\lambda \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right] \right\} \delta q_j \quad (7.36)$$

o de manera equivalente

$$\sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3N} \left(m_\lambda \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^{3N} \left(m_\lambda \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \quad (7.37)$$

Consideremos ahora las derivadas de la energía cinética del sistema con respecto a q_j y $\dot{q}_j$.

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_\lambda \dot{x}_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left(m_\lambda \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right) \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_\lambda \dot{x}_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left(m_\lambda \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (7.39)$$

Estas dos expresiones se encuentran precisamente contenidas dentro 7.37 la que, por tanto, se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (7.40)$$

la ecuación 7.24 se convierte en

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (7.41)$$

como las coordenadas generalizadas son linealmente independientes se debe cumplir que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1 \dots n \quad (7.42)$$

este conjunto de ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Lagrange, y corresponden a las ecuaciones de movimiento del sistema expresadas en coordenadas generalizadas.

Supongamos ahora que las fuerzas externas que actúan sobre el sistema se pueden separar en fuerzas conservativas, es decir, que se derivan de una función potencial, y no conservativas es decir

$$F_i = F_i^c + F_i^{nc} \quad (7.43)$$

donde los superíndices c y nc se refieren a conservativa y no conservativa respectivamente. En este caso la ecuación 7.24 queda como

$$\sum_{i=1}^{3N} (\dot{p}_i - F_i^c - F_i^{nc}) \delta x_i = 0 \quad (7.44)$$

Para las fuerzas conservativas se tiene

$$F_i^c = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (7.45)$$

la fuerza generaliza asociada con q_j corresponde en este caso a

$$Q_j^c = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (7.46)$$

la sumatoria de la derecha constituye exactamente a la derivada del potencial $V = V(x_1, \dots, x_{3N}, t)$ con respecto a q_j , por lo tanto

$$Q_j^c = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (7.47)$$

de esta manera la ecuación 7.44 se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{\text{nc}} \quad j = 1 \dots n \quad (7.48)$$

Dado que la función potencial no depende de las velocidades generalizadas podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = Q_j^{\text{nc}} \quad j = 1 \dots n \quad (7.49)$$

definimos ahora el lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (7.50)$$

de esta manera las ecuaciones de Lagrange se escriben como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{\text{nc}} \quad j = 1 \dots n \quad (7.51)$$

Si sobre el sistema actúan solo fuerzas conservativas entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots n \quad (7.52)$$

7.7. Cálculo variacional

Una clase de problemas que se presentan a menudo en física involucran la determinación de las funciones que hacen mínimo o máximo un género especial de magnitudes conocidas con el nombre de funcionales.

Los funcionales son aquellas magnitudes cuyos valores dependen de una o más funciones. Así por ejemplo, el problema de encontrar la curva de menor longitud posible que une dos puntos dados $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ en el plano, involucra determinar la función $y = f(x)$ que pasa por los puntos P y Q y que minimiza la siguiente integral

$$L[f(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (7.53)$$

Un problema similar consiste en encontrar la curva de menor longitud que une dos puntos dados sobre una superficie $\varphi(x, y, z) = 0$.

Estas curvas, denominadas geodésicas, se determinan al minimizar la integral

$$G[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad (7.54)$$

vemos que la integral depende, en este caso, de dos funciones $y(x)$ y $z(x)$, las que además deben cumplir con la condición $\varphi(x, y, z) = 0$.

Un tipo de problemas de superficie mínima consiste en encontrar la curva que pasa por dos puntos dados, y que al ser rotada en torno a un eje produce una superficie con la menor área posible. En este caso el área de la superficie se determina como

$$S[f(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (7.55)$$

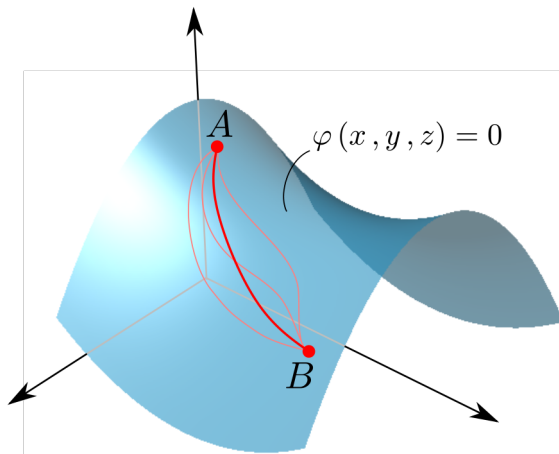


Figura 7.9: La curva geodésica corresponde a la curva de menor longitud que une dos puntos dados sobre una superficie.

la curva que produce la superficie de área mínima es aquella que minimiza el valor de $S[f(x)]$. En estos ejemplos las magnitudes $L[f(x)]$, $G[y(x), z(x)]$ y $S[f(x)]$ constituyen los funcionales.

Otro ejemplo, de gran importancia histórica en física, es el problema de la braquistócrona. Propuesto originalmente en 1696 por Johann Bernoulli, el problema consiste en hallar la curva que debe seguir un objeto que se deja caer libremente desde un punto A hasta llegar a otro punto B en el menor tiempo posible, asumiendo que durante su caída está sujeto a la gravedad terrestre en ausencia de resistencia aerodinámica y fricción.

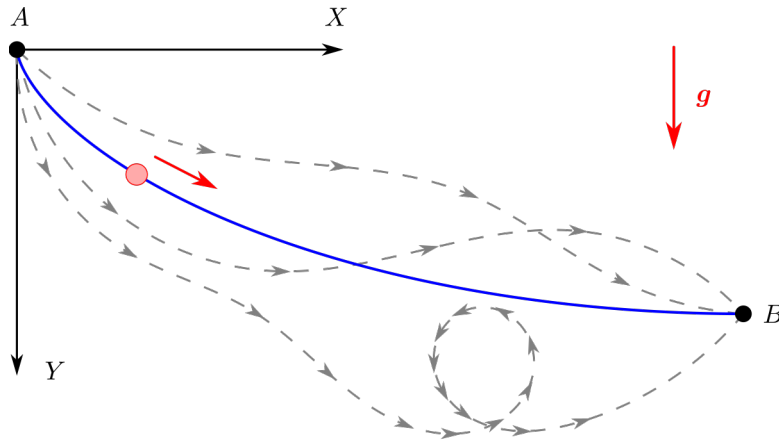


Figura 7.10: Entre el conjunto de curvas que conectan los puntos A y B , la braquistócrona, representada en azul, se distingue por ser aquella que minimiza el tiempo que una partícula tarda en desplazarse desde el punto A hasta el punto B , actuando solo bajo la acción de la gravedad.

Escogemos, como se indica en la Figura 7.10, un sistema coordenado con su origen en el punto A y con el eje de las ordenadas positivo hacia abajo. Usando la ley de conservación de energía mecánica podemos escribir

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad (7.56)$$

La velocidad de la partícula se determina por tanto como:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (7.57)$$

Por otro lado, el intervalo de tiempo que le toma a la partícula recorrer una porción de longitud ds de la curva es

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \quad (7.58)$$

teniendo en cuenta que el elemento de longitud vale: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, se concluye que

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx \quad (7.59)$$

el tiempo total de recorrido de la partícula entre los puntos A y B es por tanto

$$T[y(x)] = \int_{x_A=0}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx \quad (7.60)$$

De esta manera, para el problema de la braquistócrona $T[y(x)]$ constituye el funcional.

En todos los problemas antes descritos lo que se tiene es que el funcional depende de una o más funciones, pudiendo estas ser escalares o vectoriales, al contrario de los problemas convencionales de optimización en donde el problema depende de un número. El cálculo variacional tiene por tanto como objetivo el estudio de los métodos que permiten determinar los valores máximos o mínimos de los funcionales.

Centraremos nuestra atención en aquellos funcionales que dependen de una sola función, es decir, buscamos la función $y(x)$ que hace que la siguiente integral sea mínima

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y, y') dx \quad (7.61)$$

en donde la función $y(x)$ se encuentra sujeta a las restricciones

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y(x_1) &= y_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

7.8. Ecuación de Euler-Lagrange

Analicemos el extremo de la integral de la ecuación 7.61, y supongamos que la función $y(x)$ es efectivamente el extremo del funcional 7.61. Construyamos ahora el siguiente conjunto de funciones

$$y(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon (\bar{y}(x) - y(x)) \quad (7.63)$$

donde $\bar{y}(x)$ es una función cercana a $y(x)$, y ϵ un parámetro. El conjunto de funciones $y(x, \epsilon)$ debe satisfacer las siguientes condiciones

- a) $y(x_0, \epsilon) = y_0$; $y(x_1, \epsilon) = y_1$, para todo ϵ .
- b) $y(x, 0) = y(x)$
- c) $y(x, \epsilon)$ y todas sus derivadas hasta el segundo orden son funciones continuas de x y de ϵ .

Debemos precisar a que nos referimos cuando indicamos que $\bar{y}(x)$ es una función cercana a $y(x)$. Diremos que las curvas $\bar{y}(x)$ e $y(x)$ son cercanas si el valor absoluto de su diferencia es pequeño para todo $x \in [x_0, x_1]$. Exigimos además que el valor absoluto de la diferencia entre las primeras derivadas de $\bar{y}(x)$ e $y(x)$ también sea pequeña para todo $x \in [x_0, x_1]$.

Designemos a la diferencia o variación entre $\bar{y}(x)$ e $y(x)$ como

$$\delta y = \bar{y}(x) - y(x) \quad (7.64)$$

en consecuencia se tiene

$$(\delta y)' = \delta y' = \bar{y}'(x) - y'(x) \quad (7.65)$$

Si consideramos los valores que adopta el funcional $I[y(x)]$ en el conjunto de curvas $y(x, \epsilon)$, el funcional pasa a ser una función solo de ϵ , es decir

$$I[y(x, \epsilon)] = I(\epsilon) \quad (7.66)$$

Esta última conclusión se desprende del hecho de que para un determinado valor del parámetro ϵ le corresponde una única curva $y(x, \epsilon)$, la que a su vez, determina un único valor del funcional $I[y(x, \epsilon)]$. Además, esta función $I(\epsilon)$ posee un extremo en $\epsilon = 0$ dado que para dicho valor se obtiene la función $y(x)$, el extremo del funcional, tal y como se indica en la condición b).

La condición necesaria para que la función $I(\epsilon)$ tenga un extremo en $\epsilon = 0$ es

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (7.67)$$

como

$$I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y(x, \epsilon), y'(x, \epsilon)) dx \quad (7.68)$$

entonces

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right\} dx \quad (7.69)$$

pero

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} [y(x) + \epsilon \delta y] = \delta y \\ \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} [y'(x) + \epsilon \delta y'] = \delta y' \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

se obtiene por tanto

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y' \right\} dx \quad (7.71)$$

usando integración por partes la integral del segundo termino del lado derecho de la ecuación 7.71 se puede escribir como

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y' dx = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y \right|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (7.72)$$

Reemplazando este último resultado en la ecuación 7.71 obtenemos

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx \quad (7.73)$$

de la condición a) se desprende que

$$\left. \begin{aligned} \delta y|_{x_0} &= \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \\ \delta y|_{x_1} &= \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.74)$$

en consecuencia la ecuación 7.73 se convierte en

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx \quad (7.75)$$

Como buscamos que la derivada del funcional con respecto a ϵ se haga cero tenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx = 0 \quad (7.76)$$

dado que δy es una función continua arbitraria en el intervalo $[x_0, x_1]$ entonces debe cumplirse que²

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (7.77)$$

la ecuación 7.77, derivada por Leonard Euler en 1744 forma la base para la formulación de la mecánica de Lagrange, por lo que se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange.

Una aplicación importante de la ecuación 7.77, consiste en el problema de encontrar la curva que adopta un cable flexible sujeto a la acción de su propio peso. Consideremos para ello la figura 7.11, y supongamos que el cable se suspende de dos puntos fijos. La energía potencial gravitacional de una porción elemental del cable es: $dU = \mu g y \, ds$, siendo μ la densidad lineal del cable, y ds el elemento de longitud. De esta forma la energía potencial gravitacional total vale:

²Una demostración de esta última afirmación se puede encontrar en el libro de Lev Elsgoltz, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional.

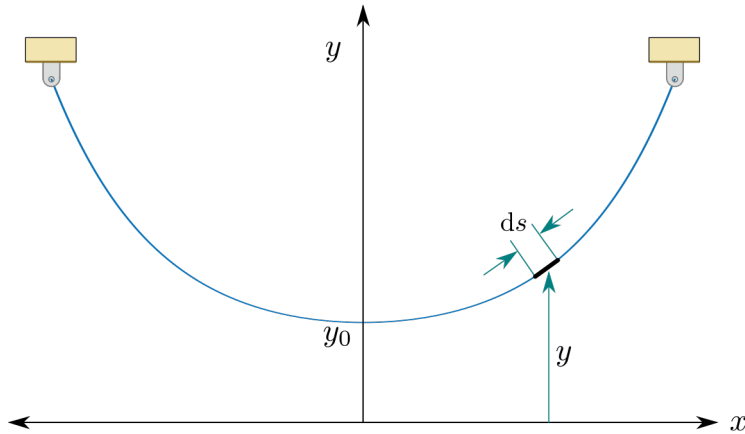


Figura 7.11: Cable flexible sujeto a la acción de su propio peso.

$$U = \mu g \int_{-D}^D y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (7.78)$$

La curva adoptada por el cable corresponderá por tanto a aquella que minimiza la energía potencial. En otras palabras buscamos la función $y(x)$ que minimiza la integral 7.78. Podemos de esta forma usar la ecuación 7.77, con $\phi = y\sqrt{1 + y'^2}$, para determinar la curva del cable. Evaluamos primero las derivadas contenidas en 7.77:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (7.79)$$

de donde se desprende que:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) = \frac{y'^2 + yy''}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{yy'^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (7.80)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sqrt{1 + y'^2} \quad (7.81)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación 7.77, y luego de simplificar se obtiene:

$$yy'' = y'^2 + 1 \quad (7.82)$$

haciendo: $y'' = \frac{dy'}{dy} y'$ se tiene:

$$\frac{y'}{y'^2 + 1} dy' = \frac{1}{y} dy \quad (7.83)$$

La solución de esta última ecuación diferencial de variables separables corresponde a:

$$y'^2 = C_1 y^2 - 1 \quad (7.84)$$

donde C_1 es una constante. Volvemos ahora a integrar la ecuación 7.84 para obtener

$$\ln \left| y + \sqrt{y^2 - \frac{1}{C_1}} \right| = C_2 e^{\sqrt{C_1} x} \quad (7.85)$$

donde C_2 es otra constante. Simplificando la ecuación anterior obtenemos:

$$y = \frac{C_2}{2} e^{\sqrt{C_1} x} + \frac{1}{2C_1 C_2} e^{-\sqrt{C_1} x} \quad (7.86)$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2 usamos las condiciones de borde que en este caso corresponden a: $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$, lo que nos conduce a: $C_1 = 1/y_0^2$ y $C_2 = y_0$. Reemplazando en la ecuación 7.86 finalmente concluimos:

$$y = \frac{y_0}{2} \left(e^{\frac{x}{y_0}} + e^{-\frac{x}{y_0}} \right) \quad (7.87)$$

o bien:

$$y = y_0 \cosh \left(\frac{x}{y_0} \right) \quad (7.88)$$

La ecuación 7.88, conocida como la catenaria, representa la curva que adopta un cable bajo la acción de su propio peso. Fue determinada por Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens y Johann Bernoulli en 1691, como respuesta a un desafío planteado por Jacob Bernoulli.

7.9. Principio de mínima acción de Hamilton

Al comparar la ecuación 7.52, obtenida a partir principio de d'Alembert, y la ecuación 7.77 determinada a partir del cálculo variacional, resulta evidente la similitud entre ambas. Hamilton notó que la formulación de la dinámica de Lagrange podía ser establecida como consecuencia de un principio variacional, el cual enuncio de la siguiente forma: *La trayectoria en el espacio de configuraciones que sigue un sistema cualquiera es aquella que minimiza la integral*

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \quad (7.89)$$

en donde $S[\mathbf{q}(t)]$ se denomina la acción y $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es el Lagrangiano del sistema que depende de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y en algunos casos del tiempo.

A cada posible curva entre dos puntos fijos del espacio de configuraciones le corresponde un determinado valor de la acción. Si esta curva cambia ligeramente, entonces también lo hará la acción. Supongamos que $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ es el extremo de la acción. Como se indica en la Figura 7.12 realizamos una variación $\delta \mathbf{q}$ a la trayectoria que sigue el sistema en el espacio de configuraciones, es decir, variamos cada coordenada generalizada en δq_i . Siguiendo a continuación un procedimiento similar al desarrollado en la sección anterior, consideramos la siguiente familia de funciones

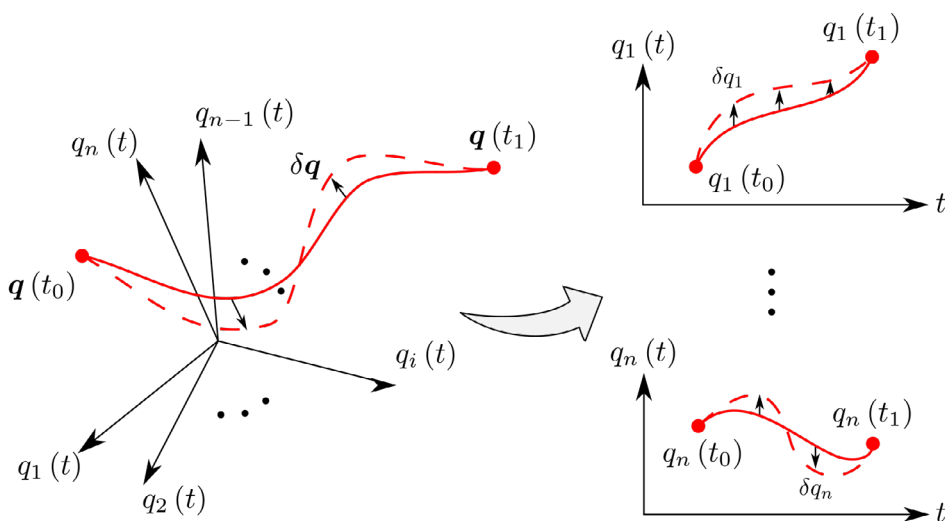


Figura 7.12: Variación de la trayectoria seguida por el sistema en el espacio de configuraciones a la izquierda. En la derecha se muestra la variación de cada una de sus coordenadas generalizadas.

$$q_i(t, \epsilon) = q_i(t) + \epsilon (\bar{q}_i(t) - q_i(t)) \quad i = 1 \dots n \quad (7.90)$$

En donde $\bar{q}_i(t)$ es una función cercana a $q_i(t)$. La acción evaluada en la familia de funciones descrita en la ecuación anterior se convierte en una función de ϵ . Derivamos ahora la acción con respecto a ϵ para obtener

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} \right) dt \quad (7.91)$$

notamos que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} [q_i(t) + \epsilon \delta q_i] = \delta q_i \\ \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} [\dot{q}_i(x) + \epsilon \delta \dot{q}_i] = \delta \dot{q}_i \end{aligned} \right\} \quad (7.92)$$

con lo que resulta

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt \quad (7.93)$$

a partir de este punto seguimos los mismos pasos que se efectuaron en la sección anterior para obtener

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt = 0 \quad (7.94)$$

como los δq_i son funciones arbitrarias se concluye

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (7.95)$$

obtenemos por tanto las ecuaciones de movimiento del sistema a partir del Principio de mínima acción de Hamilton. Es importante destacar que para llegar a este resultado no usamos la segunda ley de Newton, en cambio solo hemos utilizado el principio de mínima acción y el cálculo variacional. En consecuencia, el principio de mínima acción puede considerarse como una base alternativa para la mecánica.

7.10. Problemas capítulo 7

Problema 7.1

Un carro de masa M desliza sin fricción sobre una superficie horizontal. El carro que posee una cavidad semicircular soporta un cilindro de masa $M/4$ el que rueda sin resbalar tal y como se indica en la Figura 7.13. Determine usando dinámica lagrangiana las respectivas ecuaciones de movimiento.

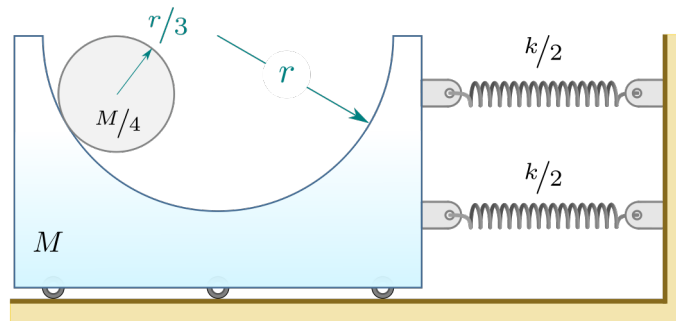


Figura 7.13: Problema 7.1.

Solución 7.1

Para describir completamente la configuración del sistema usamos las coordenadas generalizadas, $q_1 = x$, y $q_2 = \theta$, en donde x se mide desde la posición no deformada de los resortes y θ determina la rotación del centro del cilindro con respecto a la vertical como se muestra en la Figura 7.14.

Determinemos primero la energía cinética del sistema. Con ayuda de la Figura 7.15, podemos plantear la velocidad del centro de masa del cilindro como sigue:

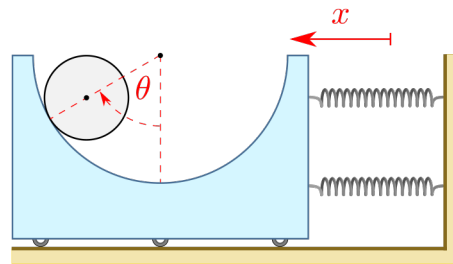


Figura 7.14: Coordenadas generalizadas del sistema.

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \left\langle \dot{x} + \frac{2}{3}r\dot{\theta} \cos \theta, \frac{2}{3}r\dot{\theta} \sin \theta \right\rangle$$

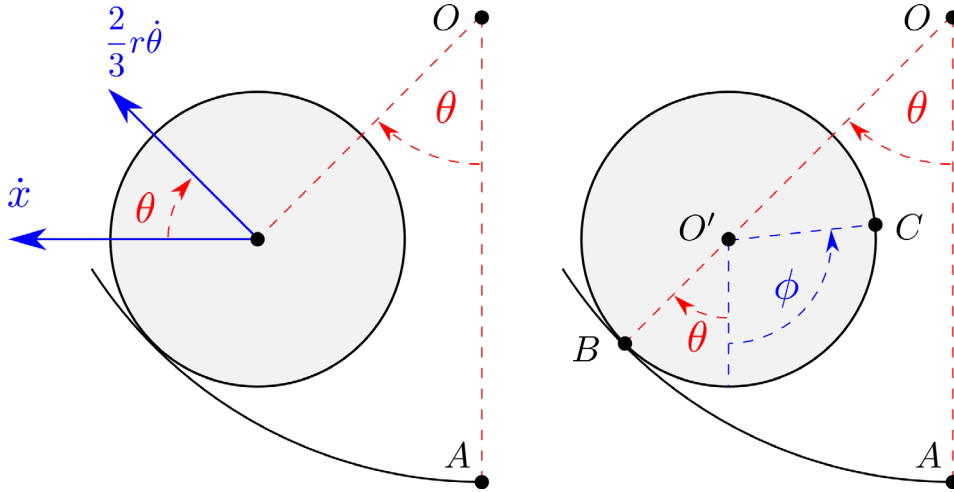


Figura 7.15: A la izquierda las velocidades del centro de masa del cilindro. A la derecha la geometría del cilindro dentro de la cavidad semicircular.

Para determinar el ángulo de rotación del cilindro, recordamos que el cilindro rueda sin resbalar por el interior de la cavidad semicircular del carro, por lo tanto, como se muestra en la Figura 7.15, se debe cumplir que:

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} \Rightarrow$$

$$r\theta = \frac{r}{3}(\phi + \theta)$$

donde ϕ es el giro del cilindro, por lo tanto

$$\phi = 2\theta \Rightarrow \dot{\phi} = 2\dot{\theta}$$

entonces, la energía cinética se expresa de la siguiente manera

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{4} \right) \left(\dot{x} + \frac{2}{3}r\dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{4} \right) \left(\frac{2}{3}r\dot{\theta} \sin \theta \right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{M}{4} \right) \left(\frac{r}{3} \right)^2 \right) (2\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$\therefore T = \frac{5}{8} M \dot{x}^2 + \frac{1}{12} M r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} M r \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

Ahora determinemos la energía potencial

$$V = \frac{M}{4}g\frac{2r}{3}(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{6}Mgr(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2$$

Por lo tanto, el Lagrangiano queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \frac{5}{8}M\dot{x}^2 + \frac{1}{12}Mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}Mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{6}Mgr(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2$$

las ecuaciones de Lagrange para cada coordenada generalizada son

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

primero determinemos las respectivas derivadas para la coordenada generalizada $q_1 = x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= \frac{5}{4}M\dot{x} + \frac{1}{6}Mr\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{5}{4}M\ddot{x} + \frac{1}{6}Mr\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{6}Mr\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -kx \end{aligned}$$

y ahora determinemos las respectivas derivadas para la coordenada generalizada $q_2 = \theta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{6}Mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{6}Mr\dot{x}\cos\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{1}{6}Mr^2\ddot{\theta} + \frac{1}{6}Mr\ddot{x}\cos\theta - \frac{1}{6}Mr\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -\frac{1}{6}Mr\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - \frac{1}{6}Mgr\sin\theta \end{aligned}$$

por lo tanto, las ecuaciones de movimiento son

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{4}M\ddot{x} + \frac{1}{6}Mr\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{6}Mr\dot{\theta}^2\sin\theta + kx &= 0 \\ \frac{1}{6}Mr^2\ddot{\theta} + \frac{1}{6}Mr\ddot{x}\cos\theta + \frac{1}{6}Mgr\sin\theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Problema 7.2

Un disco de masa m rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal. Una barra de longitud $4r$ y masa $m/2$ se conecta al disco por medio de un pivote sin fricción A como se indica en la Figura 7.16. Determine usando dinámica lagrangiana las respectivas ecuaciones de movimiento.

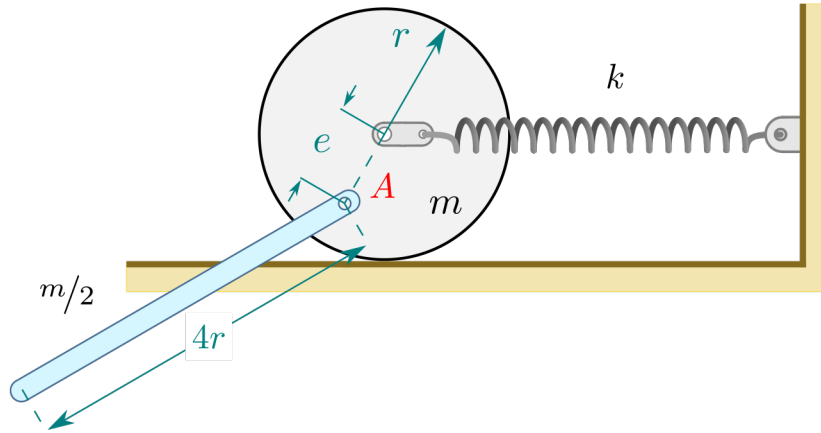


Figura 7.14: Coordenadas generalizadas del sistema.

Solución 7.2

Escogemos como coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = \theta$ como se indica en la Figura 7.17, sabemos que el disco rueda sin resbalar por lo tanto: $r\phi = x$.

Coordenadas del CM de la barra

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \left\langle e \sin \left(\frac{x}{r} \right) + 2r \sin \theta + x, \right. \\ \left. e \cos \left(\frac{x}{r} \right) + 2r \cos \theta \right\rangle$$

y ahora derivando con respecto al tiempo tenemos

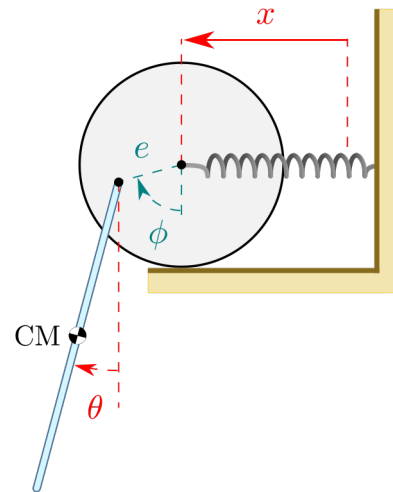


Figura 7.17: Coordenadas generalizadas, x se mide desde la posición no deformada del resorte.

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \left\langle \dot{x} + \frac{e\dot{x}}{r} \cos\left(\frac{x}{r}\right) + 2r\dot{\theta} \cos\theta, \right. \\ \left. -\frac{e\dot{x}}{r} \sin\left(\frac{x}{r}\right) - 2r\dot{\theta} \sin\theta \right\rangle$$

entonces, la energía cinética del sistema queda de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\left(\dot{x} + \frac{e\dot{x}}{r} \cos\left(\frac{x}{r}\right) + 2r\dot{\theta} \cos\theta\right)^2 \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{e\dot{x}}{r} \sin\left(\frac{x}{r}\right) + 2r\dot{\theta} \sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\left(\frac{m}{2}\right)(4r)^2\right)\dot{\theta}^2 \\ \therefore T = m\dot{x}^2\left(1 + \frac{e}{2r}\left(\frac{e}{2r} + \cos\left(\frac{x}{r}\right)\right)\right) + \frac{4}{3}mr^2\dot{\theta}^2 \\ + m\dot{x}\dot{\theta}\left(e \cos\left(\theta - \frac{x}{r}\right) + r \cos\theta\right)$$

Determinemos la energía potencial del sistema

$$V = \left[(e + 2r) - e \cos\left(\frac{x}{r}\right) - 2r \cos\theta\right] \frac{mg}{2} + \frac{1}{2}kx^2$$

Por lo tanto, el Lagrangiano queda de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = m\dot{x}^2\left(1 + \frac{e}{2r}\left(\frac{e}{2r} + \cos\left(\frac{x}{r}\right)\right)\right) + m\dot{x}\dot{\theta}\left(e \cos\left(\theta - \frac{x}{r}\right) + r \cos\theta\right) \\ + \frac{4}{3}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{mg}{2}\left[e + 2r - e \cos\left(\frac{x}{r}\right) - 2r \cos\theta\right] - \frac{1}{2}kx^2$$

las ecuaciones de Lagrange para cada coordenada generalizada son

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{array} \right\}$$

determinemos las respectivas derivadas de la primera coordenada generalizada $q_1 = x$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 2m\dot{x} \left[1 + \frac{e}{2r} \left(\frac{e}{2r} + \cos \left(\frac{x}{r} \right) \right) \right] + m\dot{\theta} \left(e \cos \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r \cos \theta \right) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= 2m\ddot{x} \left[1 + \frac{e}{2r} \left(\frac{e}{2r} + \cos \left(\frac{x}{r} \right) \right) \right] - \frac{m\dot{x}^2 e}{r^2} \sin \left(\frac{x}{r} \right) \\
 &\quad + m\ddot{\theta} \left(e \cos \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r \cos \theta \right) \\
 &\quad - m\dot{\theta} \left(e \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{r} \right) \sin \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r\dot{\theta} \sin \theta \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{m\dot{x}\dot{\theta}e}{r} \sin \left(\theta - \frac{x}{r} \right) - \frac{me\dot{x}^2}{2r^2} \sin \left(\frac{x}{r} \right) - \frac{meg}{2r} \sin \left(\frac{x}{r} \right) - kx
 \end{aligned}$$

ahora determinemos las respectivas derivadas de la segunda coordenada generalizada $q_2 = \theta$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{8}{3}mr^2\dot{\theta} + m\dot{x} \left(e \cos \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r \cos \theta \right) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{8}{3}mr^2\ddot{\theta} + m\ddot{x} \left(e \cos \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r \cos \theta \right) \\
 &\quad - m\dot{x} \left(\left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{r} \right) e \sin \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r\dot{\theta} \sin \theta \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -m\dot{x}\dot{\theta} \left(e \sin \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r \sin \theta \right) - mgr \sin \theta
 \end{aligned}$$

por lo tanto, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}
 &2m\ddot{x} \left[1 + \frac{e}{2r} \left(\frac{e}{2r} + \cos \left(\frac{x}{r} \right) \right) \right] - \frac{m\dot{x}^2 e}{r^2} \sin \left(\frac{x}{r} \right) \\
 &+ m\ddot{\theta} \left(e \cos \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r \cos \theta \right) - me\dot{\theta} \sin \left(\theta - \frac{x}{r} \right) \left(\dot{\theta} - \frac{2\dot{x}}{r} \right) \\
 &\quad + \frac{me}{2r} \left(\frac{\dot{x}^2}{r} + g \right) \sin \left(\frac{x}{r} \right) - mr\dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 &\frac{8}{3}mr^2\ddot{\theta} + m\ddot{x} \left(e \cos \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + r \cos \theta \right) \\
 &\quad + \frac{m\dot{x}^2 e}{r} \sin \left(\theta - \frac{x}{r} \right) + mgr \sin \theta = 0
 \end{aligned}$$

Problema 7.3

Un bloque de masa M puede deslizarse a lo largo de una barra inclinada como se muestra en la Figura 7.18. El bloque se une a un resorte de rigidez k , y además soporta un péndulo de masa m , sobre la cual actúa una fuerza horizontal F . Determine las ecuaciones de movimiento.

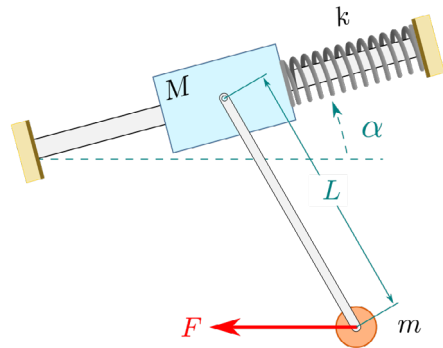


Figura 7.18: Problema 7.3.

Solución 7.3

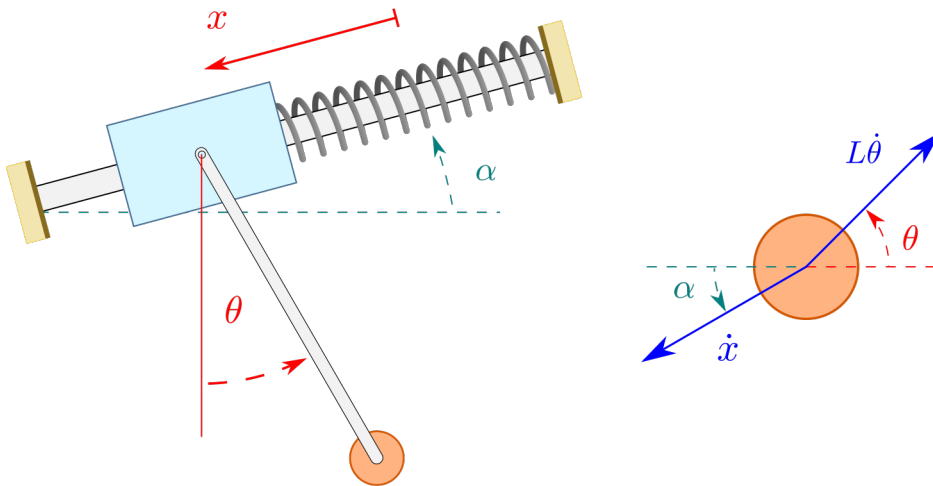


Figura 7.19: Coordenadas generalizadas del sistema, y velocidad de la masa. La coordenada x se mide desde la posición no deformada del resorte.

Escogemos como coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = \theta$ tal y como se muestra en la Figura 7.19. Determinemos la energía cinética del sistema, de acuerdo a la Figura 7.19 el vector velocidad de la masa del péndulo es

$$\mathbf{v} = \langle L\dot{\theta} \cos \theta - \dot{x} \cos \alpha, L\dot{\theta} \sin \theta - \dot{x} \sin \alpha \rangle$$

entonces la energía cinética queda como

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left(L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 - 2L\dot{\theta}\dot{x} (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) \right)$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left(L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 - 2L\dot{\theta}\dot{x} \cos (\theta - \alpha) \right)$$

Ahora determinemos la energía potencial

$$V = -Mgx \sin \alpha + mg (L (1 - \cos \theta) - x \sin \alpha) + \frac{1}{2}kx^2$$

Dado que en el sistema actúa una fuerza no conservativa, debemos determinar el trabajo virtual ejercido por dicha fuerza F . Escribimos para ello el trabajo virtual ejercido por la fuerza F como:

$$\delta W = F\delta (x \cos \alpha - L \sin \theta) = F (\cos \alpha \delta x - L \cos \theta \delta \theta)$$

por lo tanto las fuerzas generalizadas son:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_\theta &= -FL \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

El Lagrangiano del sistema se expresa por tanto de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left(L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 - 2L\dot{\theta}\dot{x} \cos (\theta - \alpha) \right) + Mgx \sin \alpha$$

$$- mgL (1 - \cos \theta) + mgx \sin \alpha - \frac{1}{2}kx^2$$

La ecuación de Lagrange para la coordenada generalizada $q_1 = x$ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F_x$$

determinemos las respectivas derivadas del Lagrangiano

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m\dot{x} - mL\dot{\theta} \cos(\theta - \alpha) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= (M + m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} \cos(\theta - \alpha) + mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta - \alpha) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha - kx\end{aligned}$$

por lo tanto, la primera ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} \cos(\theta - \alpha) + mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta - \alpha) \\ - (M + m)g \sin \alpha + kx = F \cos \alpha\end{aligned}$$

Para la coordenada generalizada $q_2 = \theta$, la ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = F_{\theta}$$

calculemos las respectivas derivadas del Lagrangiano

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= mL^2\dot{\theta} - mL\dot{x} \cos(\theta - \alpha) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} \cos(\theta - \alpha) + mL\dot{x}\dot{\theta} \sin(\theta - \alpha) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -mgL \sin \theta + mL\dot{x} \sin(\theta - \alpha)\end{aligned}$$

por lo tanto, la segunda ecuación de movimiento es

$$mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} \cos(\theta - \alpha) + mgL \sin \theta = -FL \cos \theta$$

Problema 7.4

Un cilindro hueco de masa M , radio R , y espesor e , rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal tal y como se muestra en la Figura 7.20. Por otra parte, un disco de masa

m y radio r rueda a su vez sin resbalar en la cavidad interior del cilindro, y se encuentra conectado a dos resortes de rigidez k y longitudes naturales nulas como se indica. Determine las ecuaciones de movimiento del sistema.

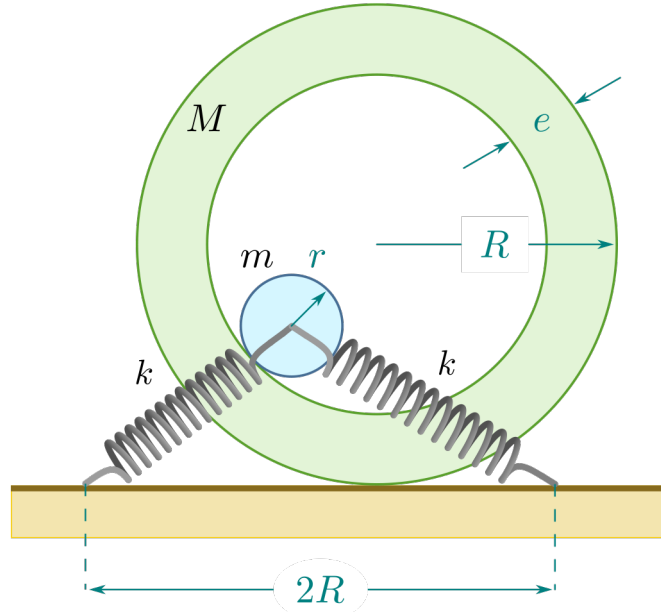


Figura 7.20: Problema 7.4.

Solución 7.4

Para describir el movimiento del sistema usamos como coordenadas generalizadas el desplazamiento horizontal del centro del cilindro, x , y el ángulo formado por la línea que une el centro del cilindro y el centro del disco con respecto a la vertical, θ . El desplazamiento del centro de masa del disco corresponde a:

$$\mathbf{r} = \langle x + a \sin \theta, a \cos \theta \rangle$$

en donde $a = R - r - e$. La velocidad del centro de masa del disco se obtiene al derivar con respecto al tiempo la expresión anterior, es decir:

$$\mathbf{v} = \langle \dot{x} + a\dot{\theta} \cos \theta, -a\dot{\theta} \sin \theta \rangle$$

En la figura 7.21 se muestra la posición inicial del sistema junto con una posición arbitraria. En el instante inicial los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se ubican de manera vertical como se indica. Cuando el sistema adopta una posición arbitraria el punto A pasa a ubicarse en A' y el punto B en B' . Como tanto el cilindro y el disco ruedan sin resbalar se debe cumplir que:

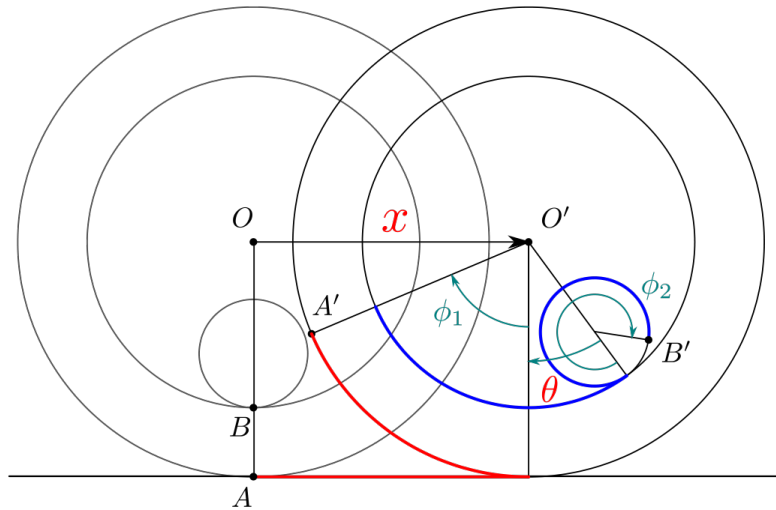


Figura 7.21: Problema 7.4. Coordenadas generalizadas y geometría.

$$R\phi_1 = x$$

además

$$(R - e)(\phi_1 + \theta) = r\phi_2$$

de donde se obtiene:

$$\phi_2 = \frac{1}{Rr}(R - e)(x + R\theta)$$

El giro del disco corresponde a $\phi_2 - \theta$ es decir:

$$(\lambda_1 - \lambda_2 - 1)\theta + (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{x}$$

en donde hemos definido: $\lambda_1 = R/r$, $\lambda_2 = e/r$ y $\bar{x} = x/R$

La energía cinética del disco se escribe por tanto como:

$$T_D = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + a^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mr^2 \right) \left((\lambda_1 - \lambda_2 - 1) \dot{\theta} + (\lambda_1 - \lambda_2) \dot{x} \right)^2$$

La expresión anterior puede expresarse convenientemente en términos de los números adimensionales antes definidos como:

$$T_D = \frac{1}{2}mR^2 \left(\dot{x}^2 + 2\frac{\alpha}{\lambda_1}\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2}\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{4}mR^2 \left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\dot{\theta} + \frac{\alpha + 1}{\lambda_1}\dot{x} \right)^2$$

o bien:

$$T_D = \frac{1}{2}mR^2 \left(\dot{x}^2 + 2\frac{\alpha}{\lambda_1}\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\dot{\theta} + \frac{\alpha + 1}{\lambda_1}\dot{x} \right)^2 \right)$$

siendo: $\alpha = \lambda_1 - \lambda_2 - 1$. Por otra parte la energía cinética del cilindro se determina como:

$$T_C = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_o \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 \quad (\text{P7.4-96})$$

en donde I_o es la inercia polar del cilindro con respecto a su centro. Esta inercia se puede obtener como la resta de la inercia de un disco lleno de radio R y masa m_1 (por determinar) y otro disco lleno de radio $R - e$ y masa m_2 . Como los radio de estos discos guardan entre sí la relación: $\frac{R-e}{R}$ entonces sus masas se relacionan como: $m_2 = m_1 \left(\frac{R-e}{R} \right)^2$. A partir de esta última condición y usando el hecho que $M = m_1 - m_2$ obtenemos:

$$m_1 = M \frac{R^2}{R^2 - (R - e)^2}$$

La inercia del cilindro se determina por tanto como:

$$I_o = \frac{1}{2}M \left(\frac{R^4}{R^2 - (R - e)^2} \right) - \frac{1}{2}M \left(\frac{(R - e)^4}{R^2 - (R - e)^2} \right)$$

simplificando y luego de reemplazar en la ecuación P7.4-96 se tiene:

$$T_C = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}M \left(R^2 + (R - e)^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2$$

Expresando la energía cinética del cilindro en función de los adimensionales:

$$T_C = \frac{1}{4\lambda_1^2} \left((\alpha + 1)^2 + 3\lambda_1^2 \right) MR^2 \dot{\bar{x}}^2$$

La energía potencial del sistema se divide en energía potencial elástica almacenada por los resortes y la energía potencial gravitacional del disco. La energía almacenada por los resortes se determina a partir de las longitudes finales de cada resorte, resulta ser:

$$U_e = k \left(x^2 + 2R^2 + a^2 + 2a(x \sin \theta - R \cos \theta) \right)$$

la que en términos de los adimensionales queda como:

$$U_e = kR^2 \left(\bar{x}^2 + 2 + \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2} + 2\frac{\alpha}{\lambda_1} (\bar{x} \sin \theta - \cos \theta) \right)$$

La energía potencial gravitacional del disco, en referencia al nivel de la superficie horizontal, es:

$$U_g = mg(R - a \cos \theta) = mgR \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} \cos \theta \right)$$

Luego de escribir el Lagrangiano del sistema y efectuar las derivadas parciales correspondientes obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[m + \frac{1}{\lambda_1^2} (m + \lambda_1^4 M) \left((\alpha + 1)^2 + 3\lambda_1^2 \right) \right] \ddot{\bar{x}} + \frac{\alpha}{\lambda_1} m \ddot{\theta} \left(\frac{1}{2\lambda_1} (\alpha + 1) + \cos \theta \right) - \frac{\alpha}{\lambda_1} m \dot{\theta}^2 \sin \theta - 2k \left(\bar{x} + \frac{\alpha}{\lambda_1} \sin \theta \right) &= 0 \\ \frac{\alpha}{\lambda_1} \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \frac{\alpha+1}{\lambda_1} \right) m R \ddot{\bar{x}} + \frac{3}{2} \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2} m R \ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\lambda_1} m R \dot{\bar{x}} \dot{\theta} \sin \theta - 2k R \frac{\alpha}{\lambda_1} (\bar{x} \cos \theta + \sin \theta) - \frac{\alpha}{\lambda_1} mg \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Tom W.B. Kibble, Frank H. Berkshire, Classical Mechanics, quinta edición, Imperial College Press, 2011
- [2] Claudio Romero, Apuntes para el curso Sistemas Dinámicos, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 1997
- [3] John R. Taylor, Mecánica Clásica, Editorial Reverté, 2013
- [4] Ferdinand P. Beer, Dinámica Vectorial para Ingenieros, décima edición, McGraw Hill, 2013
- [5] Lanczos, Cornelius. The Variational Principles of Mechanics. Dover Publications, 1986 (4th ed.).
- [6] L. Elsgoltz, Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional , Editorial MIR, 1992
- [7] J.P. Den Hartog, Mechanical Vibrations, cuarta edición, Editorial Dover, 1985

Este libro se enmarca en la formación de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil en Obras Civiles del campus Puerto Montt de la Universidad de los Lagos. A través de sus páginas el libro busca introducir a los estudiantes en los conceptos teóricos fundamentales de la física clásica, y las metodologías de resolución de problemas prácticos en mecánica.

El texto se divide en un total de siete capítulos los que contienen las nociones y conceptos de la física clásica, desde las leyes fundamentales del movimiento establecidas por Newton, hasta la potente formulación de la mecánica establecida por Euler y Lagrange. Cada capítulo contempla a su vez la incorporación de numerosos problemas resueltos, recopilados de pautas de evaluaciones, que constituyen un valioso material de estudio para los alumnos de la carrera de Ingeniería Civil en Obras Civiles, así como también para los estudiantes de otras carreras de Ingeniería.